Exercice 1 :

1. Trouver un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans les cas suivants :

a) si $x \in [1 ; 10]$; b) si $x \in [-2 ; -1]$; c) $2 < x < 5$; d) $-100 \leqslant x \leqslant -10$.

2. Trouver un encadrement de $\frac{2}{x} - 3$ dans les cas suivants :

a) si $x \in [1 ; 2]$; b) $-4 \leqslant x \leqslant -2$.

Exercice 2 : Trouver les points A et B de la courbe représentative de la fonction inverse admettant des tangentes parallèles de coefficient directeur – 0,25. Quel est le milieu du segment [AB] ?
La tangente en A coupe l'axe des abscisses en C et celle en B coupe l'axe des abscisses en D.
Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ?

Exercice 3 : Pour x dans $]0 ; +\infty[$, comparer les nombres $\frac{1}{x}$, x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$. Justifier la réponse.

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x - 6 + \frac{8}{x}$.

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Préciser les extremums locaux.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) représentative de f au point A d'abscisse 1.
4. Trouer les asymptotes à la courbe (C).

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x}$.

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Préciser les extremums locaux.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point A d'abscisse 2.
4. Trouver les coordonnées d'un point B de la courbe admettant une tangente parallèle à (T).
5. Trouver les asymptotes à la courbe (C) et tracer l'allure de la courbe (C).

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{x}$.

1. a) Montrer que la fonction dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

2. Préciser les extremums locaux de la fonction f.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 2.
4. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle des solutions ? Si oui, donner une valeur approchée à 0,1 près.

Exercice 7 : On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On considère les rectangles OABC avec A sur l'axe des abscisses d'abscisse positive et C sur l'axe des ordonnées, d'aire égale à 8 cm².

1. Représenter graphiquement au moins quatre de ces rectangles.
2. Le point B semple être sur une courbe connue. Laquelle ?
3. Trouver une relation vérifiée par les coordonnées $(x ; y)$ de B et trouver la fonction f telle que $y = f(x)$.
4. Trouver la position du point B pour que la distance OB soit minimale.
5. Trouver la position du point B pour que le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B soit égal à – 2.

Exercice 8 : On considère un nombre réel x strictement positif.
Trouver le plus petit nombre égal à la somme de x et de son inverse.
Pour quelle valeur de x ce minimum est-i atteint ?

Exercice 9 : On considère l'hyperbole (H) représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé du plan d'origine O. Pour tout point A de (H), on note (T) la tangente à (H) en A.
Cette tangente coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C.
Comment varie l'aire du triangle OBC lorsque A parcourt l'hyperbole (H) ?

Exercice 10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$ où a, b et c sont des nombres réels.
Déterminer les réels a, b et c tels que la courbe représentative de f passe par les points A(1 ; 5) et B(2 ; 6) et admette en A une tangente de coefficient directeur – 1.

Exercice 11 : Quelles dimensions doit-on donner à une boîte fermée de volume 8 dm^3 ayant une base carrée pour que sa construction demande le moins de matériau possible ? (Négliger l'épaisseur du matériau et les chutes) ?

Exercice 12 : Un scénographe doit construire une scène rectangulaire pour une pièce de théâtre dans un lieu ouvert, et cette scène s'appuie sur un mur rectiligne de 50 m de long. La scène doit avoir une aire égale à 200 m^2. Ce scénographe doit entourer la scène par un ruban de couleur, sur ses trois côtés. Il cherche à minimiser la longueur du ruban. On pose x la longueur du côté de la scène parallèle au mur.
1. Déterminer la longueur du ruban en fonction de x.
2. En déduire la longueur minimale et les dimensions de la scène dans ce cas.
3. On suppose maintenant que la scène a la forme d'un demi-cercle appuyé sur le mur. Déterminer la longueur de ruban nécessaire. Comparer avec la longueur de la question 2.

Exercice 13 : ABCD est un rectangle de périmètre 24 cm et tel que AB $\geq$ AD.
Le point B' est le symétrique de B par rapport à (AC) et N est le point d'intersection de [CD] et (AB').
Le but de l'exercice est d'étudier les variations de l'aire du triangle ADN en fonction de AB $= x$.
1. Montrer que $x \in [6\ ;\ 12]$.
2. Montrer que les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC}$ et $\widehat{NCA}$ sont égaux ; en déduire que le triangle ACN est isocèle.
3. Déterminer la longueur AD en fonction de x.
4. a) Montrer que AN $= x -$ DN et que AN$^2 = (12 - x)^2 +$ DN^2.
b) En déduire que DN $= 12 - \dfrac{72}{x}$.
5. Montrer que l'aire du triangle ADN est égale à $108 - 6x - \dfrac{432}{x}$.
6. Étudier le sens de variations de cette aire sur l'intervalle [6 ; 12].
7. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ?

Exercice 14 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 - x + 4 + \dfrac{12}{x}$.
1. a) Montrer que la fonction dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{(x-2)(2x^2+3x+6)}{x^2}$.
b) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Préciser les extremums locaux de la fonction f.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe au point A d'abscisse 1.
4. a) Montrer que $2x^3 + 10x^2 - 12 = (x - 1)(2x^2 + 12x + 12)$.
b) Montrer qu'il existe deux autres points de la courbe où la tangente est parallèle à T. Donner les abscisses de ces deux points.

Exercice 15 : But : Comment fabriquer une casserole de 1 litre avec le moins de métal possible ?
On note x le rayon du disque de base et h la hauteur de la casserole.
1. Déterminer l'aire totale S(x) de la casserole. Préciser l'ensemble de définition de cette fonction S.
2. Étudier les variations de la fonction S sur son ensemble de définition.
3. En déduire le minimum de la fonction S, la valeur de x correspondante et la valeur de h correspondante.
Que remarque-t-on ?