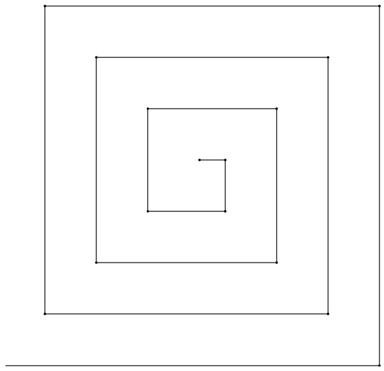
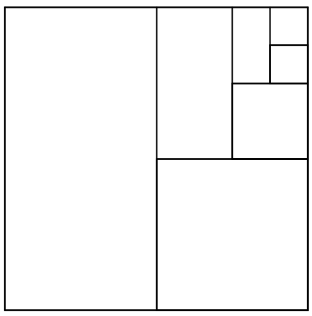
EXERCICE 1 (Spirale) : La figure (spirale) ci-contre est constituée de segments dont le plus petit mesure 1, le suivant 2, le suivant 3, etc...



On note u_n la longueur du n–ième segment.
1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Écrire un terme de la suite en fonction du précédent.
3. Écrire u_n en fonction de n.
4. Calculer la longueur du dixième segment et du millième segment.
5. La longueur de la spirale peut s'écrire en fonction de n : On note s_n la longueur des n premiers segments.
a) Écrire s_{n+1} en fonction de s_n .
b) Calculer s_{10} , puis s_{100} .

EXERCICE 2 (des grands nombres) : Sur un échiquier (de 8×8 cases), on dépose un grain de riz sur la première case, puis deux grains de riz sur la deuxième case, puis quatre grains de riz sur la troisième case, et on continue ce procédé en doublant le nombre de grains de riz jusqu'à la soixante-quatrième case. On note u_n le nombre de grains de riz sur la n–ième case.
1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Écrire u_n en fonction de n .
4. Calculer le nombre de grains de riz sur la huitième case et sur la soixante-quatrième case.
5. Déterminer le nombre de grains de riz ainsi déposés sur l'échiquier.
6. Comparer avec la production mondiale de riz : 780 millions de tonnes (2018) et il y a environ 40000 grains de riz dans un kilo.

EXERCICE 3 (des carrés dans des carrés): On considère un carré de côté 1 ; on découpe ce carré en deux rectangles de même aire ; puis l'un des deux rectangles est découpé en deux carrés ; puis un des carrés est découpé en deux rectangles, etc...

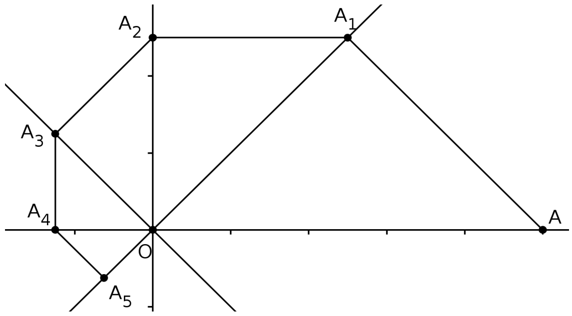


On note u_n l'aire du n–ième rectangle construit.
1. Calculer l'aire du premier rectangle construit.
2. Calculer l'aire du deuxième rectangle construit.
3. Calculer l'aire du dixième rectangle construit.
4. Trouver une relation entre u_n et u_{n+1} .
5. Quelle est la somme des aires des cinq premiers rectangles ?
6. Si le procédé est reconduit indéfiniment, quelle est la somme des aires de tous les rectangles obtenus ?

EXERCICE 4 : 1. Pour chacune des suites numériques suivantes définies sur $\mathbb{N}$, déterminer les quatre premiers termes de la suite sans l'aide de la calculatrice :
a) $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = 3$; b) $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = 1$; c) $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = -1$;
d) $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$; e) $u_n = 10^n - 1$; f) $u_n = 2^n - 1$; g) $u_n = n^2 - 4n + 1$;
h) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ et $u_0 = 1$; i) $u_{n+1} = u_n - 5$ et $u_0 = 10$. j) $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ et $u_0 = 0$.
2. Retrouver les résultats à l'aide de la calculatrice.
3. Lorsque c'est possible, calculer u_{20} .
4. Préciser celles qui sont arithmétiques et celles qui sont géométriques.

EXERCICE 5 (augmentation de salaire) : Dans une entreprise, on propose deux contrats d'embauche :
Contrat 1 : Salaire mensuel net de 1200 euros la première année; augmentation de 5 % chaque année.
Contrat 2 : Salaire mensuel net de 1500 euros la première année; augmentation de 60 euros chaque année.
On note S_n et T_n les salaires mensuels la n-ième année avec, respectivement, le contrat 1et le contrat 2 .
a) Calculer S_2, S_3, S_{10} , T_2, T_3, T_{10} .
b) Écrire la relation liant les termes consécutifs S_{n+1} et S_n et la relation liant les termes consécutifs T_{n+1} et T_n .
c) Déterminer au bout de combien d'années, le contrat 1 devient plus intéressant que le contrat 2.
d) Calculer le salaire perçu pendant les dix premières années avec chacun des contrats.

EXERCICE 6 (longueur d'une ligne polygonale) : Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère le point A(1 ; 0) et les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.
On construit les points A_1, A_2 , A_3, ... par le procédé indiqué sur la figure ci-contre, tel que OAA_1 est un triangle rectangle isocèle, ainsi que OA_1A_2 :

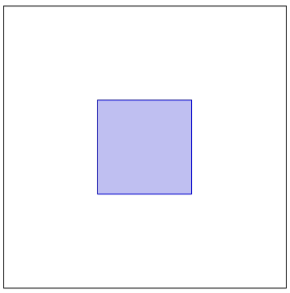


a) On note $a_0 =$ OA, $a_1 =$ OA_1, $a_2 =$ OA_2 , ... Calculer a_1, a_2, a_3 .
b) Trouver une relation liant les termes consécutifs a_{n+1} et a_n . En déduire a_8 et a_{15} .
c) Calculer la longueur du polygone $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$.

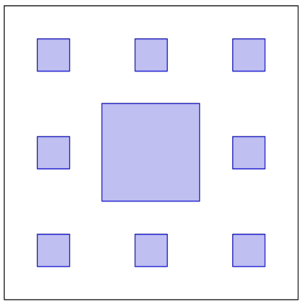
EXERCICE 7 (Une suite de Fibonacci) :
On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
2. Déterminer les variations et la limite éventuelle de cette suite.
3. On définie une autre suite (v_n) en posant $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
b) Préciser les variations et la limite éventuelle de cette suite (v_n).

EXERCICE 8 (Carré de Sierpiński) : On considère un carré de côté 1 ; on construit un carré au centre de côté 1/3 et on itère le procédé comme sur les figures suivantes :

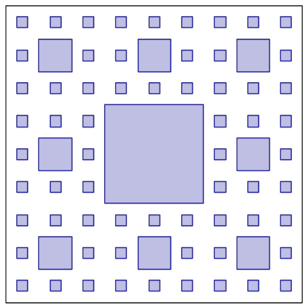
Étape 1



Étape 2



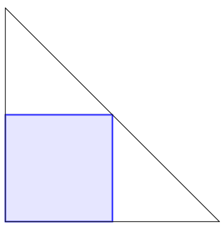
Étape 3



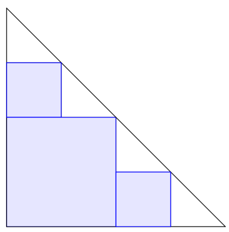
Calculer le nombre de carrés aux étapes 1, 2, 3 et 10, puis la somme des aires des carrés noircis à la dixième étape.

EXERCICE 9 (Construction géométrique) :
On considère la suite de construction effectuée dans un triangle isocèle rectangle de côté 1 comme sur les figures ci-contre.
A chaque étape n, les nouveaux points sur l'hypoténuse sont les milieux des segments obtenus à l'étape précédente.

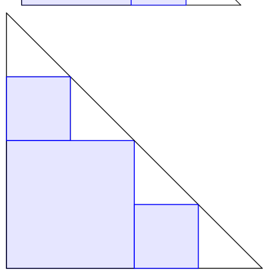
Etape 0 :



Etape 1 :



1. Construire la figure à l'étape 2 ci-dessous :



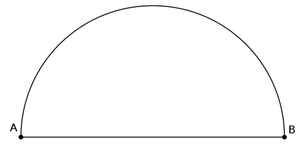
2. On considère la suite (u_n) donnant le nombre de segments formés sur l'hypoténuse à l'étape n.
a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 .
b) En déduire une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .
c) En déduire la longueur de la ligne brise entre les deux extrémités de l'hypoténuse en fonction de u_n .

3. On considère la suite (a_n) des aires de la figure grisée à l'étape n.
a) Calculer a_0 , a_1 , a_2 , a_3 .
b) En déduire une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n .

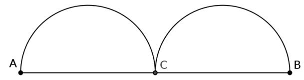
EXERCICE 10 (Construction géométrique) :

On considère la suite de construction de demi-cercles comme sur les figures ci-contre avec AB = 1.
A chaque étape n, les nouveaux points sur [AB] sont les milieux des segments obtenus à l'étape précédente.

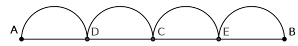
Etape 0 :



Etape 1 :



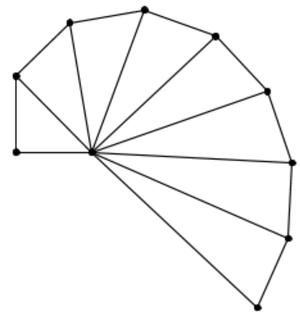
Etape 2 :



1. On considère la suite (u_n) donnant la longueur des demi-cercles à l'étape n.
a) Calculer u_0 , u_1 , u_2 , u_3 .
b) En déduire une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .
c) Conjecturer les variations et la limite éventuelle de cette suite.

2. On considère la suite (u_n) des aires des demi-cercles à l'étape n.
a) Calculer u_0 , u_1 , u_2 , u_3 .
b) En déduire une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .
c) Conjecturer les variations et la limite éventuelle de cette suite.

EXERCICE 11 (Spirale de Pythagore) : La spirale ci-contre est constituée de triangles rectangles dont un côté de l'angle droit est toujours égal à 1. Le plus petit triangle est isocèle rectangle. La suite (u_n) est définie par : u_n = longueur de l'hypoténuse du n-ième triangle.



1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Écrire u_n en fonction de n .
4. Déterminer la longueur de la dixième hypoténuse, puis de la centième..
5. Calculer la longueur de la spirale extérieure avec dix triangles, puis avec 100 triangles.

EXERCICE 12 (une suite arithmético-géométrique) **:** Étude de suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$, a et b sont des réels.

a) Dans une réserve, une population initiale de 1000 animaux évolue de la façon suivante : chaque année, 20 % des animaux disparaissent et on introduit 120 animaux supplémentaires. Décrire l'évolution de cette population au bout de n années (notée p_n et $p_0 = 1000$).

b) Au premier janvier 2004, Pierre a placé la somme de 1000 euros sur un compte rémunéré au taux annuel de 4 %. Les intérêts acquis au cours d'une année sont capitalisés. Au premier janvier de chaque année, Pierre ajoute la somme de 100 euros au capital obtenu. Exprimer, en fonction de l'année, le capital obtenu au bout de n années (noté C_n) . Déterminer son capital au premier janvier 2020.

c) Cas général : on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = au_n + b$ où a est un réel non nul et différent de 1, et b est un réel non nul.
Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique.
En déduire v_n , puis u_n en fonction de a, b, n et α.

EXERCICE 13 : Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :
$u_0 = 9$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$.
1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique à termes positifs (préciser sa raison et son premier terme).
2. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k$ en fonction de n;
en déduire la somme $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de n.