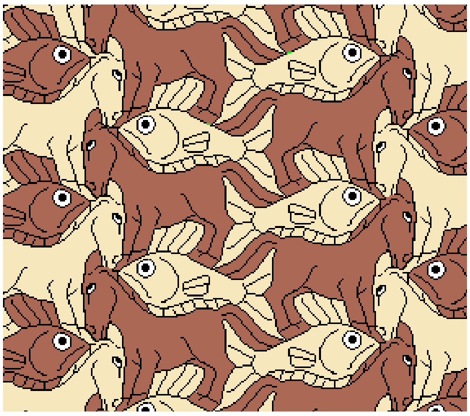
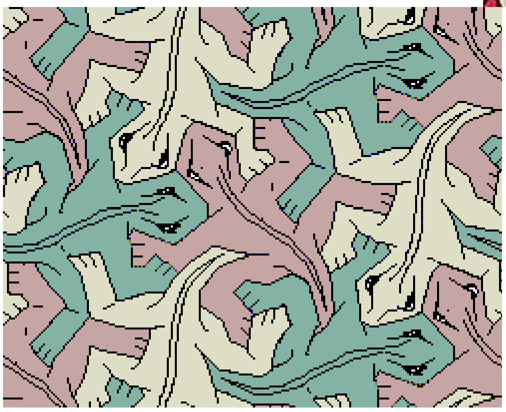
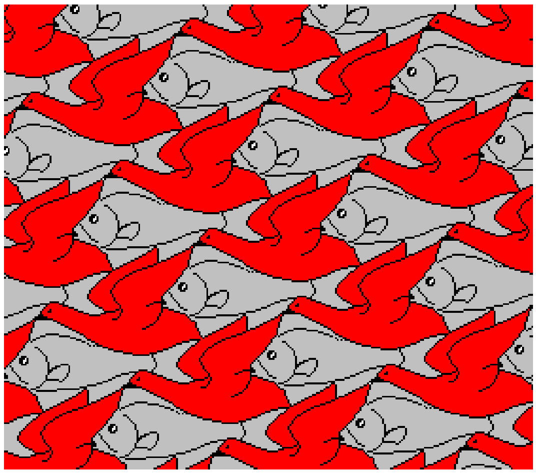
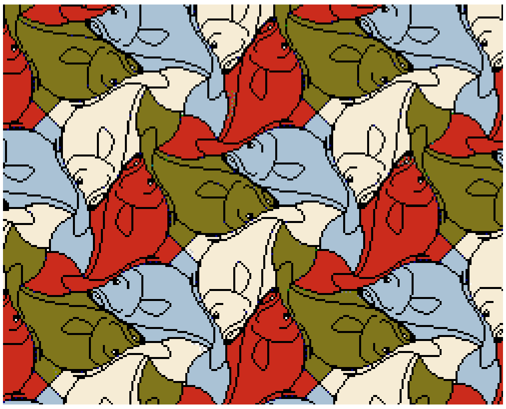
EXERCICES TERMINALE STD2A PAVAGES DU PLAN (1)

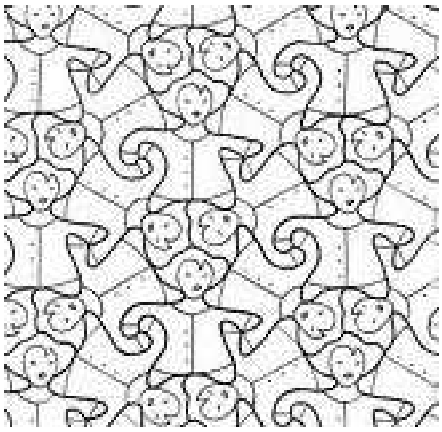
Exercice 1 : Pour chacune des figures suivantes, déterminer le motif et les transformations utilisées pour obtenir le pavage.

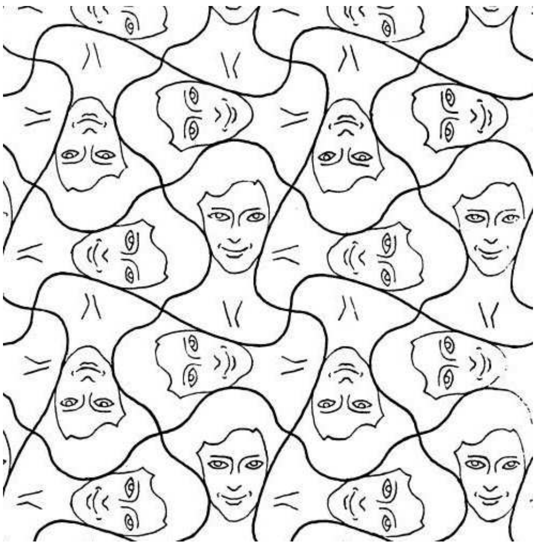


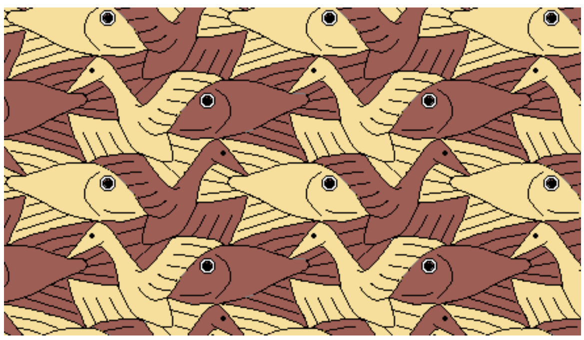








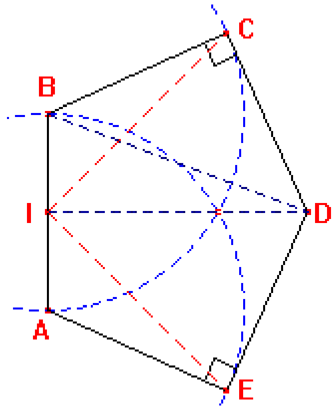




Exercice 2 : Construire un pavage du plan à partir des figures suivantes et avec les transformations indiquées.
a) Un trapèze isocèle avec des symétries centrales ;
b) Un hexagone à six côtés de même longueur mais non régulier avec des symétries axiales ; le pavage contient-il que des hexagones ? Sinon, quelles autres figures ?
c) Un losange dont un angle égale 30° avec des rotations d'angle 30°.

Exercice 3 :
Construire un pavage du plan à partir des figures suivantes (on pourra essayer plusieurs transformations) :
a) Un quadrilatère quelconque ;
b) Un triangle quelconque ;
c) Un hexagone avec 6 côtés de même longueur et un triangle équilatéral contigu ;
d) Un hexagone avec 6 côtés de même longueur + un carré et un triangle contigu ;

Exercice 4 : Un pavage avec un pentagone : Le motif de base : le pavage du Caire est un pavage du plan constitué de pentagones irréguliers. Il s'agit de l'un des 14 pavages pentagonaux isoédraux connus (pour les 14 pavages, voir http://mathafou.free.fr/pbm/sol231a.html).



Le pavage porte ce nom car il apparaît dans les rues du Caire en Égypte, ainsi que dans l'art Islamique. Le motif est un pentagone ayant ces cinq côtés de même longueur et deux angles droits.
À partir d'un segment [AB], tracer sa médiatrice et du milieu I de [AB] dessiner les deux bissectrices faisant des angles de 45° avec cette médiatrice. Le cercle de centre B, passant par A, coupe une des bissectrices en C et par symétrie le cercle de centre A, passant par B, coupe l'autre bissectrice en E. La perpendiculaire en C à (BC) coupe la médiatrice en D.
ABCDE est un pentagone semi-régulier : les cinq côtés sont égaux :
en effet, par construction AB = BC = AE. Le quadrilatère IBCD, ayant deux angles droits, est inscriptible dans le cercle de diamètre [BD]. Les angles inscrits $\widehat{CID}$ et $\widehat{CBD}$ sont égaux à 45°, BCD est un triangle rectangle isocèle en C.
Soit IB = 1, alors BC = CD = 2 et BD = $2\sqrt{2}$.
Dans le triangle rectangle IBD, $ID^2 = BD^2 - IB^2 = 8 - 1 = 7$, d'où ID = $\sqrt{7}$.
$\cos(\widehat{IBD}) = \dfrac{IB}{BD} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. $\widehat{IBD} = 69{,}3°$, $\widehat{IBC} = \widehat{IBD} + 45° = 114{,}3°$, $\widehat{BDI} = 90° - \widehat{IBD} = 20{,}7°$,

$\widehat{CDI} = 45° + \widehat{IBD} = 65.7°$, $\widehat{CDE} = 2\,\widehat{CDI} = 131{,}4°$.

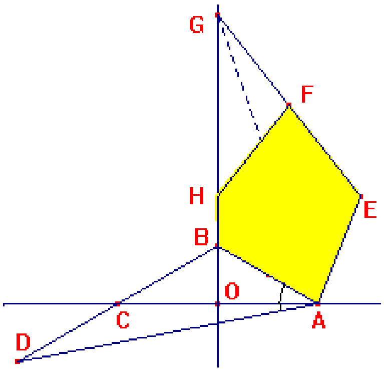
Deux des angles du pentagone sont droits, deux autres angles mesurent environ 114,3° et le dernier 131,4°, la somme de ces trois angles obtus est de 360° rendant possible l'assemblage de trois pentagones autour des points D et D'.

Faire la construction avec GeoGebra : placer deux points A et B. Tracer le cercle de centre le milieu I de [AB], de rayon $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ×AB qui coupe la médiatrice de [AB] en D.
Le triangle BCD étant rectangle isocèle, il suffit de trouver C à l'intersection du cercle de diamètre [BD] et de la médiatrice de [BD]. Le point E est le symétrique de C par rapport à (ID).

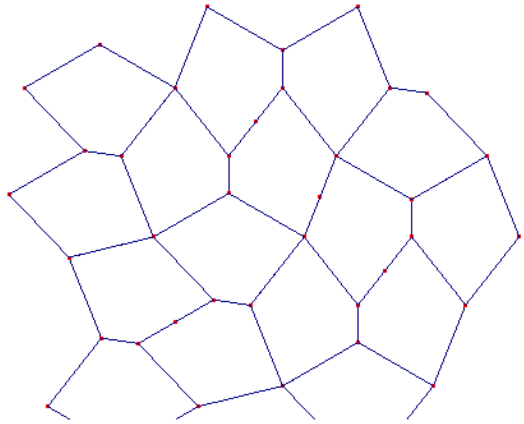
Exercice 5 : Autres pavages avec un pentagone :
a) Construire le pentagone ABCDE de la manière suivante :
Construire le segment [AB]. Puis C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens horaire, E est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle 144° dans le sens antihoraire, et D est l'image de A par la rotation de centre E et d'angle 90° dans le sens antihoraire.
Vérifier que l'angle $\widehat{EDC} = \widehat{BCD} = 108°$.
Ce pentagone ABCDE pave le plan avec des rotations d'angle 90°.

Voir l'animation : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pentagones.htm

b) **Pavage de Marjorie Rice :**

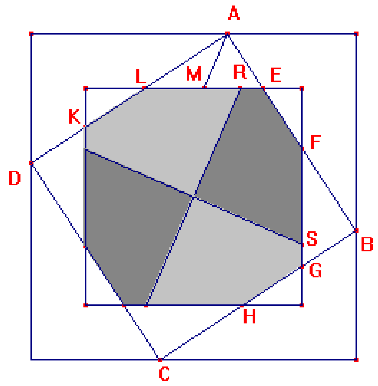


Sur deux droites perpendiculaires et sécantes en O, placer A, B et C de telle sorte que OC = OA.
Construire ensuite le symétrique de B par rapport à C.
Puis on applique au triangle ABD une rotation de centre A qui amène D sur la demi-droite [OB). On note G l'image de D, E l'image de B et F celle de C (F est donc le milieu du segment [FG]). Le triangle ABD est donc transformé en AEG.

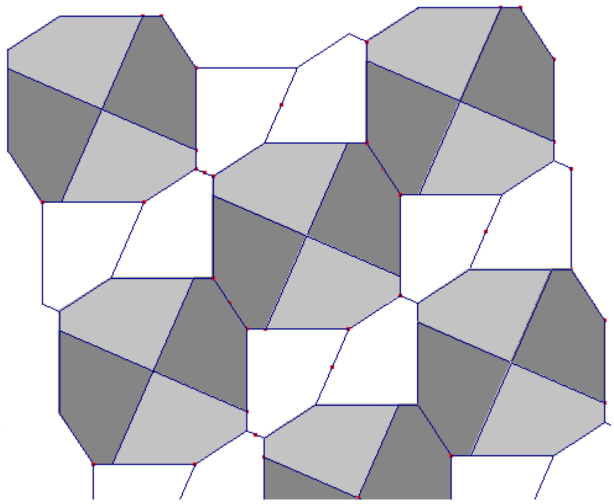


On construit enfin H sur (BG) en projetant E sur (OB).
Le pentagone AEFHB pave le plan comme indiqué sur la figure ci-contre.

c) Pavage de Richard E. James :

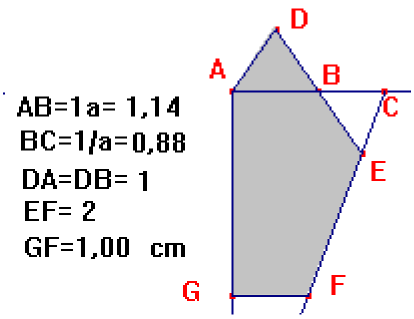


On dessine tout d'abord deux carrés de même centre, à côtés parallèles, l'un de dimension 2, l'autre de dimension 3.
On place ensuite sur le grand carré quatre points A, B, C et D de telle façon que ABCD soit un carré (de même centre que les deux autres). Chacun des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] coupe le petit carré en deux points.



Sur le dessin, [AB] coupe le petit carré en deux points E et F. On a noté O le centre commun des trois carrés. [BC] coupe le petit carré en deux points G et H. [DA] coupe le petit carré en deux points K et L.
On introduit ensuite M, le milieu du segment [LE].
On trace enfin la parallèle à (AM) passant par O et la perpendiculaire à (AM) passant aussi par O.
La première coupe la droite (LE) en un point R. La seconde coupe la droite (FG) en un point S. Alors le pentagone OREFS pave le plan.

d) Pavage de Rolf Stein :



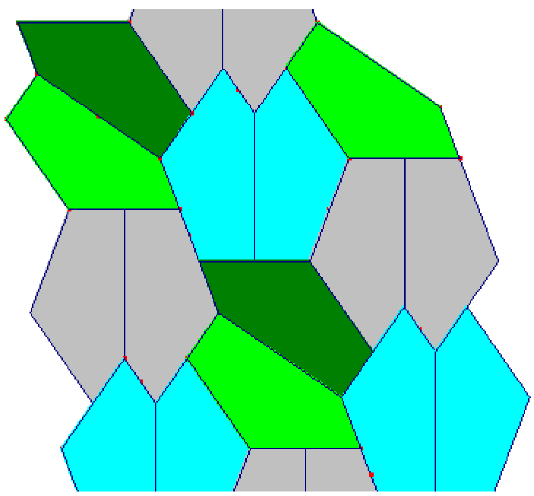
Dans ce qui suit, a représente le nombre $\frac{\sqrt{57}-3}{4} \simeq 1{,}13745$.

On trace tout d'abord deux demi-droites perpendiculaires de même origine A.

Sur l'une, on place B et C de manière que : AB = a et BC = $\frac{1}{a}$.

On construit ensuite D équidistant de A et B avec DA = DB =1.

On place ensuite E symétrique de D par rapport à B.

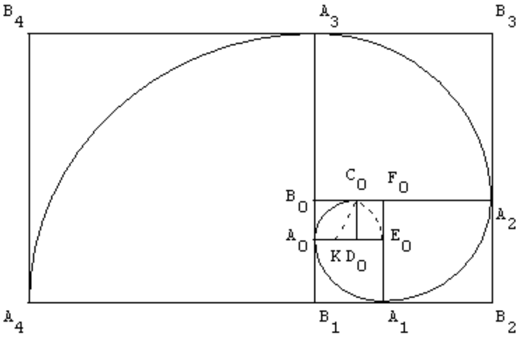


Enfin, sur la demi-droite d'origine C contenant E, on place F de sorte que EF = 2.
Notons G la projection orthogonale de F sur la demi-droite perpendiculaire en A à (AB). On vérifie que FG = 1.

Le pentagone ADEFG pave le plan.

Exercice 6 : Pavage non périodique du plan :

a) Le rectangle d'or



Il est possible de paver le plan à partir de rectangles d'or. Ce pavage non régulier est formé de rectangles de plus en plus grands.

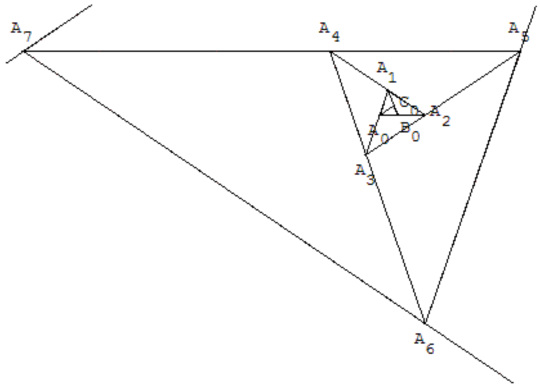
Tracer un rectangle d'or initial $A_0B_0F_0E_0$ à partir du carré $A_0B_0C_0D_0$. Revoir la construction dans le cours de première.

Tracer $A_0E_0A_1B_1$. $B_0F_0A_1B_1$ est un rectangle d'or. Remplacer A_0 , B_0 , F_0 , E_0 respectivement par C_1 , F_1 , E_1 , D_1 pour obtenir le rectangle d'or $A_1B_1F_1E_1$ contenant le carré $A_1B_1C_1D_1$ de niveau 1.

En traçant dans chaque nouveau carré le quart de cercle de centre D_n, reliant A_nA_{n+1}, on obtient la spirale d'or $C_0A_0A_1A_2$ …

b) Le triangle d'or :

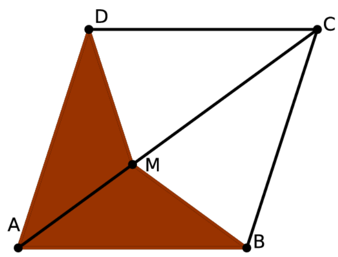
Rappel : un triangle d'or est un triangle isocèle dont l'angle au sommet principal est égal à 36°.
Construction :
Il est possible de paver le plan à partir de triangles d'or.
Ce pavage non régulier est formé de triangles de plus en plus grands.
À partir du triangle $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ créer le point A_{n+3} tel que $A_{n+1}A_nA_{n+3}$ soit une section d'or et recommencer.
Construction : Tracer un triangle d'or initial $A_0B_0C_0$. Trouver le point A_1 tel que $B_0C_0A_1$ forme une section d'or. Remplacer A_0 et B_0 respectivement par B_1 , C_1 pour obtenir le triangle d'or $A_1B_1C_1$ de niveau 1.



Ces derniers exercices sont issus de la page : http://debart.pagesperso-orange.fr/college/pavage.html#af394

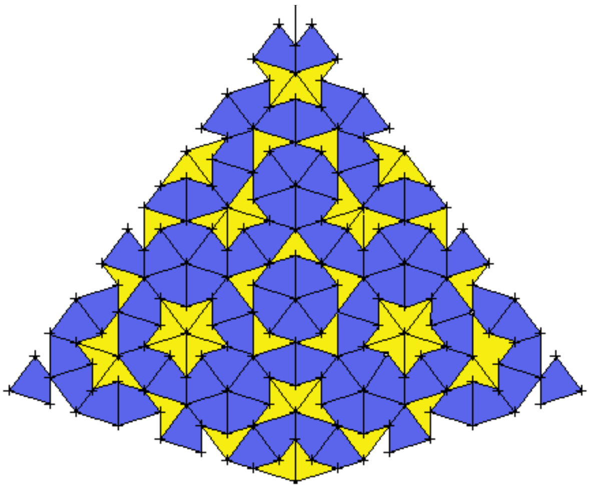
Voir aussi : http://artsciencefactory.fr/2012/06/13/pavage-3d-stereoscopie/

Exercice 8 : Pavage de Penrose



Les pavés de Penrose ont la forme d'un losange ABCD dont la longueur des côtés est 1 et dont un angle intérieur fait 72°. On situe un point M sur la diagonale [AC] à une distance 1 du sommet C. De ce point partent les deux segments [MB] et [MD] rejoignant les deux autres sommets du losange, comme le montre la figure ci-dessous. Les deux quadrilatères ainsi formés sont appelés "fer de lance" (BCDM) et "cerf-volant" (ABMD).

1. Calculer les mesures en degrés de $\widehat{ABM}$, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{BMC}$.
2. Calculer la longueur du segment [BM] à 0,001 près.
3. Calculer l'aire d'un fer de lance et d'un cerf-volant à 0,01 près.



pavage de Penrose