Exercice 1 : (4 points) Commun à tous les candidats
Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire X qui suit la "loi de durée de vie sans vieillissement" ou encore loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

   On prendra 0,125 pour λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils.

   Le responsable du laloratoire décide de commander 15 oscilloscopes.

   Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de supérieure à 10 ans?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscope pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 1ans soit supérieure à 0,999?

Rappel

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$, dite loi de durée de vie sans vieillissemenr:
pour $0 \leq a \leq b$, $P[a; b] = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$
et pour tout $c \geq 0$, $P([c; +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{\lambda t} dt$

o———————————————————o

Exercice 2: (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Le plan complexe est muni d'un reprère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 1cm.

1. On désigne par A, B, et I les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

   (a) Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

   (b) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$
   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB?

   (c) Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

   (d) Soit D le barycentre du système $\{(A1,); (B, -1); (C, 1)\}$.
   Calculer l'affixe z_D du point D.

   (e) Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que

$$||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}||$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que : $||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = 4\sqrt{5}$

   (a) Montrer que B appartient à Γ_2.

   (b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

Exercice 3: (6 points) Commun à tous les candidats

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_k(x) = x + \frac{1 - ke^x}{1 + ke^x}$$

   (a) Justifier que pour tout réel k positif ou nul, la fonction fk est solution de l'équation différentielle:

$$(E) : 2y' = (y - x)^2 + 1$$

   (b) En déduire le sens de variation de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k, dans un repère orthonormal $(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j})$.

   Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes C_k correspondants à des valeurs particulières de k.

   Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées $(1, 1)$.

3. On remarque que, pour tout x réel, on a:

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + ke^x} \ (1) \quad \text{et} \quad f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1 + ke^x} \ (2)$$

   En déduire pour tout k strictement positif:

   - la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D'.

   - les asymptotes de la courbe C_k.

4. Cas particulier: $k = 1$

   (a) Justifier que f_1 est impaire.

   (b) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f_1(t)dt$.

   Interpréter graphiquement le réel $F(x)$ dans les deux cas suivants: $x > 0$ et $x < 0$.

   Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

   (c) Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

   (d) En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement $F(x)$.

Exercice 4: (5 points) Commun à tous les candidats

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}dt$$

1. (a) Déterminer le sens de variation de cette suite.
   (b) Montrerque $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive.
   (c) Montrer que pour tout $t \in [0;1]$, on a $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \leq \dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
   Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur [0;1] par:

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

   (a) Etudier le sens de variation et le signe de f.
   (b) En déduire le sens de variation de g sur [0;1].
   (c) Etablir que pour tout x appartenant à [0;1], l'encadrement:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

   (d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à [0;1].
   (e) Etablir l'encadrement $\dfrac{2}{3(n+2)} \leq I_n \leq \dfrac{23}{30(n+1)}$.
   (f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leq 10^{-2}$

Annexe Exercice 3