BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Antilles- septembre

SESSION DE 2002

ÉPREUVE FACULTATIVE DE MATHÉMATIQUES

SÉRIE L

Durée de l'épreuve 3 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

Le candidat doit traiter ***TROIS EXERCICES*** *:*

Obligatoirement *: Exercice 1* ***et*** *Exercice 2.*

Au choix *: Exercice 3* ***ou*** *Exercice 4.*

Exercice 1 obligatoire (7 points)

On considère un segment [AB] de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B. Les points N et P sont tels que AMNP est un carré.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale.
Les distances sont exprimées en centimètres.

I. On pose AM = x

1) Faire une figure.

2) Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.

3) Déterminer en fonction de x la distance BM.

4) Déterminer en fonction de x la distance BN.
(On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$)

II. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $f(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$.

La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle [0, 10] par $f'(x) = \dfrac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$.

1) a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

b) Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle [0 ; 10] que l'on précisera.

2) a) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité un centimètre.

b) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 8. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

III. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment [AB]pour lequel la distance BN est minimale.

Exercice 2 **obligatoire** (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_o = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 5$.

1 - a) Calculer les termes u_1 et u_2.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? On justifiera les réponses.

2 - On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 10$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_o.

b) Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

3 - Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

AU CHOIX exercice 3 ou exercice 4

Exercice 3 (7 points)

Une urne contient trois boules vertes, une boule bleue et cinq boules rouges.

On tire au hasard simultanément trois boules de cette urne.

1 - Déterminer le nombre de choix possibles pour ce tirage.

2 - On considère les événements A, B, C et D suivants :

A : « Tirer trois boules rouges ».
B : « Tirer trois boules de la même couleur ».
C : « Ne tirer aucune boule verte ».
D : « Tirer au moins une boule verte ».

a) Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'événement A est égale à $\frac{5}{42}$.

b) Déterminer la probabilité de chacun des événements B, C et D. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

3 - Un tirage est gagnant si l'on tire trois boules rouges.
On effectue quatre tirages successifs en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans l'urne.
Tous les tirages sont indépendants.

Déterminer la probabilité d'obtenir exactement trois tirages gagnants. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Exercice 4 (7 points)

On considère les nombres $A = 8\ 387\ 592\ 115$ et $B = 9\ 276\ 312\ 516$.

1) a) Montrer que 1 000 est divisible par 8.

b) Montrer que A est congru à 3 modulo 8.

c) Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.

2) Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à A+ B et à AB.

3) a) Montrer que B^2 est divisible par 8.

b) Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.

c) Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.