BACCALAUREAT GENERAL – SERIE L – EPREUVE FACULTATIVE

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT TROIS EXERCICES
OBLIGATOIREMENT : L'EXERCICE 1 ET L'EXERCICE 2
AU CHOIX : L'EXERCICE 3 OU L'EXERCICE 4.

L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 : OBLIGATOIRE (8 points)

Partie A : On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [1 ; 25] par :

$$f(x) = 5\,x - 50 \text{ et } g(x)= \frac{\exp x}{100} - 100.$$

I - 1) Donner le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 25].

2) a) Déterminer la dérivée g'(x).

b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle [1 ; 25] .

3) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
On prendra pour unité graphique : - 2 cm pour 5 unités en abscisse
- 1 cm pour 20 unités en ordonnée.

Pour la courbe représentative de la fonction g, on se limitera à représenter les points dont l'abscisse est comprise entre 1 *et* 10.

II - On considère la fonction h définie sur l'intervalle [1 ; 25] par h(x) = 30 ln x – 2 x + 10. On note h' la dérivée de h.

1) Montrer que $h'(x) = \dfrac{30 - 2x}{x}$.

2) Étudier le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle [1 ; 25].

3) Montrer que la fonction h passe par un maximum. On donnera la valeur pour laquelle ce maximum est atteint et la valeur prise alors par la fonction.

4) Tracer la courbe représentative de la fonction h dans le même repère qu'à la question I.

Partie B : Les gains exprimés en milliers d'euros de trois chanteurs sont fonction du nombre x de semaines écoulées depuis la sortie simultanée de leurs albums et sont donnés par f(x), g(x) et h(x).

1) *Dans cette question, aucune justification n'est demandée. Il s'agit seulement d'interpréter les données.*

a) Quelle fonction correspond au gain du chanteur A sur lequel les producteurs ont investi près de 100 milliers d'euros et dont le succès est phénoménal après quelques semaines de promotion acharnée ?

b) Quelle fonction correspond au gain du chanteur B, inconnu, qui obtient un succès très rapide malgré l'absence d'investissement promotionnel avant de s'essouffler au bout de quinze semaines ?

c) En vous inspirant des questions du 1) et 2), décrire l'évolution du gain du chanteur C.

2) Par lecture graphique :

a) Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur C gagne plus que le chanteur B.

b) Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur A gagne plus que le chanteur B .

EXERCICE 2 : OBLIGATOIRE (7 points)

L'unité est le centimètre.

On considère un triangle $A_0\ B_0\ C_0$ rectangle isocèle en A_0 tel que: $A_0B_0 = A_0C_0 = 20$.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2) Soit A_1 le milieu du segment $[B_0C_0]$, B_1 le milieu du segment $[A_0C_0]$ et C_1 le milieu du segment $[A_0B_0]$.

   a) Tracer le triangle $A_1B_1C_1$.

   b) Montrer que le triangle $A_1B_1C_1$ est un triangle rectangle isocèle en A_1.

   c) Calculer l'aire de $A_1B_1C_1$ notée u_1 et l'aire de $A_0B_0C_0$ notée u_0.

   d) Exprimer u_1 en fonction de u_0.

3) Soit A_2 le milieu du segment $[B_1C_1]$, B_2 le milieu du segment $[A_1C_1]$ et C_2 le milieu $[A_1B_1]$.

   a) Calculer l'aire du triangle $A_2B_2C_2$ notée u_2.

   b) Exprimer u_2 en fonction du u_0.

4) En réitérant cette construction, on définit un triangle $A_nB_nC_n$ rectangle isocèle en A_n. On note u_n l'aire de ce triangle $A_nB_nC_n$.

   a) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 200$.

   b) Déterminer le plus petit entier p tel que $u_p < 10^{-3}$.

   c) Exprimer en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. En déduire la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$.

Rappel:

Suites arithmétiques de premier terme u_0 et de raison a :

$u_{n+1} = u_n + a \quad ; \quad u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques de premier terme u_0 et de raison b :

$u_{n+1} = b\,u_n \quad ; \quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$ $\quad 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$ $\quad 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^n = n + 1$

EXERCICE 3 : AU CHOIX (5 points)

Dans cet exercice on étudie la divisibilité par 11 *en exploitant la congruence modulo* 11 *des puissances de* 10.

1) a) Vérifier que $100 \equiv 1$ (modulo 11). En déduire que $10^4 \equiv 1$ (modulo 11).

   b) Vérifier que $10 \equiv -1$ (modulo 11).
   En déduire que $10^3 = -1$ (modulo 11) et que $10^5 = -1$ (modulo 11).

2) a) En utilisant l'égalité $3\,729 = 37 \times 100 + 29$ et les résultats précédents, montrer que 3 729 est divisible par 11.

   b) En utilisant la méthode précédente, étudier la divisibilité de 9 240 par 11.

3) a) En utilisant l'égalité $3\,729 = 3 \times 103 + 7 \times 102 + 2 \times 10 + 9$ et les résultats précédents, montrer que 3 729 est divisible par 11.

   b) En utilisant cette méthode, étudier la divisibilité de 9 240 par 11.

4) Étudier la divisibilité de 197 277 par 11.

<u>EXERCICE 4</u> : AU CHOIX (5 points)

Les constructions demandées sont à faire sur la FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

1) Compléter sur la figure 1 de la feuille annexe, la représentation en perspective cavalière de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle de fuite 30° d'un cube ABCDEFGH dont on a donné le plan frontal ABFE.

2) Compléter sur la figure 2 de la feuille annexe, la représentation en perspective à point de fuite d'un cube ABCDEFGH dont on a donné le plan frontal ABFE, le point C et le point de fuite O.

3) Citer une propriété de la représentation en perspective cavalière qui ne soit pas vérifiée en perspective à point de fuite.

4) Compléter sur la figure 3 de la feuille annexe, la représentation en perspective à point de fuite d'un carrelage régulier de quatre rangées de six carreaux.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE (si l'exercice 4 est choisi)

Figure 1 :

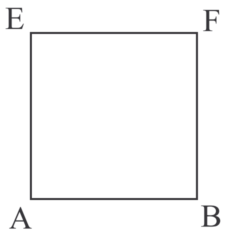

Figure 2 :

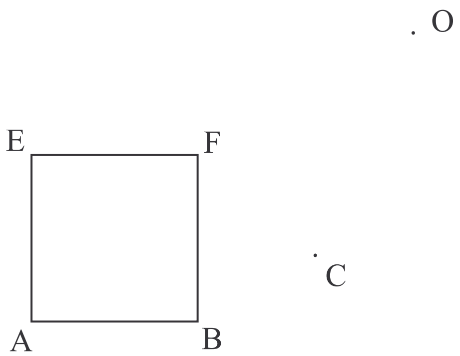

Figure 3 :