

Bac L - Option facultative de mathématiques
Washington, juin 2003

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,25;10]$ par : $f(x) = \ln(x) + \frac{2}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité de longueur étant 2cm.

- 1) Déterminer la fonction dérivée f' de cette fonction f et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I .
- 2) Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ et en déduire l'équation réduite de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 1.
- 3) Tracer la courbe (C) ainsi que la tangente (T) .
- 4) a) Développer $(x-3)(x-6)$.
- b) Résoudre dans l'intervalle I l'équation $f'(x) = \frac{1}{9}$.

c) Justifier alors que la courbe (C) admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = \frac{x}{9}$.

Exercice 2 (7 points)

Un jeu consiste à cocher 8 cases sur la grille A (n° 1 à 20) et une case sur la grille B (n° 1 à 4).

GRILLE A				
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

GRILLE B			
1	2	3	4

Les résultats des calculs de probabilité seront donnés à 0,0001 près.

1. Déterminer le nombre de façons de cocher 8 cases dans la grille A.
Un tirage détermine 8 "bons numéros" dans la grille A et un "bon numéro" dans la grille B.
2. **Cas 1** Le joueur récupère sa mise lorsqu'il a coché 4 "bons numéros" dans la grille A et un "bon numéro" dans la grille B.
 - a) Combien de grilles cochées A comportent 4 "bons numéros" et 4 "mauvais numéros" ? En déduire la probabilité de cocher 4 "bons numéros" dans la grille A.
 - b) Calculer la probabilité de cocher le "bon numéro" dans la grille B.
 - c) En déduire que la probabilité que le joueur récupère sa mise est de 0,0688.
3. **Cas 2** : Le joueur gagne s'il a coché 5, 6, 7 ou 8 bons numéros dans la grille A (avec ou sans le numéro gagnant de la grille B).
 - a) Combien de grilles cochées A contiennent 5 "bons numéros" et 3 "mauvais numéros" ?
 - b) En déduire la probabilité de cocher 5 "bons numéros" dans la grille A.
4. On admet que la probabilité de gagner est $\frac{2}{11}$. Un joueur décide de jouer les mêmes numéros sur quatre tirages consécutifs. Déterminer la probabilité que ce joueur soit gagnant deux fois sur les quatre tirages.

Exercice 3 (6 points)

Rappel : Un rectangle est un "rectangle d'or" si le quotient de sa longueur par sa largeur est égale au nombre d'or :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ABCD est un rectangle tel que $AD > AB$. On considère les points $K \in [BC]$ et $H \in [AD]$ tels que ABKH soit un carré et I le milieu du segment [AH].

$$ID = AD - \frac{1}{2} AB$$

1. Justifier que

$$IB = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$$

2. Montrer que

3. Dans cette question, on suppose que le rectangle ABCD est un rectangle d'or.

a) Exprimer ID en fonction de AB.

b) En déduire que si ABCD est un rectangle d'or, alors $ID = IB$.

4. Dans cette question, on suppose que $ID = IB$.

a) Exprimer AD en fonction de AB.

b) En déduire que ABCD est un rectangle d'or.

5. On considère le segment [AB] de longueur 6 cm. Construire à la règle et au compas un rectangle d'or ABCD ($AD > AB$) en justifiant la construction de chaque élément et en laissant apparaître les tracés.

Exercice 4 (6 points)

Dans une entreprise de vente par correspondance, les références des articles sont composées de 6 chiffres et d'une lettre de contrôle afin d'éviter les erreurs de saisie. La position de la lettre dans l'alphabet correspond au reste de la division de la référence numérique par 26.

Exemple : La référence numérique $123456 = 4748 \times 26 + 8$ et la 8^{ème} lettre de l'alphabet est H donc la référence de l'article avec sa clé de contrôle est 123456H.

1. La référence numérique d'un article est 784503, déterminer la lettre de contrôle correspondant à cet article.

2. On considère la référence ...37254H où le premier chiffre a été effacé.

a) On note n le chiffre manquant. Vérifier que le nombre $n37254 = n \times 100000 + 37254$.

b) Déterminer le reste de la division de 100000 par 26, puis de 37254 par 26.

c) En déduire que $4n + 22 \equiv 8 \pmod{26}$.

d) Sachant que $1 \leq n \leq 9$, trouver le chiffre manquant dans la référence.