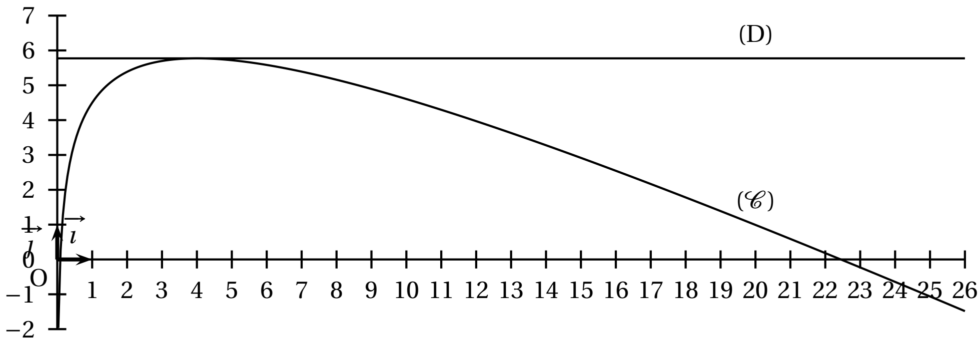
# Baccalauréat L Japon juin 2004

Le candidat traitera obligatoirement trois exercices
**OBLIGATOIREMENT** L'exercice 1 et l'exercice 2
**AU CHOIX :** L'exercice 3 ou l'exercice 4.
L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

## Exercice 1 obligatoire — 7 points

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
La droite (D) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 4 et est parallèle à l'axe des abscisses.
L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.




### Partie A : Lectures graphiques

1. **a.** Donner par lecture graphique, une valeur approchée à 0,5 près de $f(2)$ et $f(20)$.
   **b.** Donner la valeur exacte de $f'(4)$.
2. Donner par lecture graphique, le tableau de variations de la fonction $f$ ainsi que le signe de la dérivée $f'$.

### Partie B : Vérifications algébriques

On suppose que $f(x)$ est de la forme $ax + b + c\ln x$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels et ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. **a.** Exprimer $f'(x)$ en fonction de $a$, $c$ et $x$.
   **b.** Le maximum de $f$ étant obtenu pour $x$ égal à 4, en déduire une relation entre $a$ et $c$.
2. **a.** Sachant que la courbe représentative de $f$ passe par le point A(1 ; 4,5), donner une relation entre $a$ et $b$.
   **b.** On sait que le point B(e ; 7 – 0,5e) appartient à la courbe représentative de $f$. En déduire une relation entre $a$, $b$ et $c$.
3. **a.** Déduire des questions précédentes que l'on a

$$f(x) = -0{,}5x + 5 + 2\ln x.$$

   **b.** En déduire les valeurs exactes de $f(2)$ et $f(20)$ et du maximum de $f$.

**c.** Déterminer la limite en 0 de $f$.

## EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

### Partie A

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour sur l' autre à cause de la chaleur. Pour la journée du 1$^{\text{er}}$ juin le débit $D_0$ est égal à 300 m$^3$ par jour.

1. Calculer le débit $D_1$ pour le 2 juin.
2. Soit $D_n$ le débit pour le $n^{\text{e}}$ jour après le 1$^{\text{er}}$ juin. Exprimer $D_{n+1}$ en fonction de $D_n$. Quelle est la nature de la suite $(D_n)$ ?
3. Exprimer $D_n$ en fonction de $n$. Calculer le débit $D_{29}$ pour la journée du 30 juin. On arrondira au dixième de mètre cube.
4. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin. On arrondira le résultat au mètre cube.

On rappelle que $\quad 1 + b + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

### Partie B

À partir du 1$^{\text{er}}$ juillet, le débit du ruisseau peut-être considéré comme nul (inférieur à 0,5 m$^3$/jour).
La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4% du volume total de l'eau par jour.
De plus, on doit libérer de la retenue 500 m$^3$ d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse.
Le 1$^{\text{er}}$ juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\,000$ m$^3$ d'eau.

1. Soit $V_n$ le volume d'eau au $n^{\text{e}}$ matin après le 1$^{\text{er}}$ juillet.

   **a.** Montrer que $V_1$ est égal à 95 500 m$^3$.
   **b.** Exprimer $V_{n+1}$ en fonction de $V_n$.

2. On considère la suite de terme général $U_n$ définie pour tout entier $n$ par : $U_n = V_n + 12\,500$.
   Montrez que la suite $(U_n)$ est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme $U_0$.
3. Exprimer le terme général $U_n$ en fonction de $n$. En déduire l'expression de $V_n$ en fonction de $n$.
4. Calculer $V_{31}$ le volume restant au matin du 1$^{\text{er}}$ août. (On arrondira le résultat au mètre cube).
5. À quelle date la retenue sera-t-elle à « sec » ?

## EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers.

On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code. La clé de contrôle $x_7$ est le reste de la division euclidienne par 10 de la somme : $N = (x_1 + x_3 + x_5) + 7(x_2 + x_4 + x_6)$.

1. **a.** Vérifier que le code suivant est correct : 2 3 4 1 5 4 7.

**b.** Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1 •.

**c.** Un des chiffres du code suivant a été effacé : 1 1 2 • 7 7 4. Le calculer.

**2.** Dans cette question un des chiffres du code est erroné au lieu de saisir $x_1\, x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$, le dactylographe a frappé $x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 x_7$.

**a.** Écrire les sommes $N_1$ et $N_2$ associées respectivement aux deux codes précédents puis calculer la différence $N_1 - N_2$.

**b.** Montrer que l'équation $7a \equiv 0$ [modulo 10] où $a$ est un entier compris entre 0 et 9, a pour seule solution 0.

**c.** L'erreur de frappe sera-t-elle détectée ?

**3.** Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$, le dactylographe a frappé $x_1 x_3 x_2 x_4 x_5 x_6 x_7$.

**a.** Écrire les sommes $N_1$ et $N_2$ associées à ces deux codes, puis calculer la différence $N_1 - N_2$.

**b.** Donner un exemple de valeurs de $x_2$ et $x_3$ pour lesquelles la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

EXERCICE 4 AU CHOIX **6 points**

Dans cet exercice, on a choisi une unité de longueur qui n 'est pas précisée.
On considère trois cercles concentriques ($C_1$), ($C_2$), ($C_3$) de centre O et de rayons respectifs 2, 4 et 8 unités.
La figure correspondante est donnée sur la feuille annexe À RENDRE AVEC LA COPIE.
Elle sera complétée au fur et à mesure de l'exercice en faisant apparaître les traits de construction utiles.

**1.** Construire à la règle et au compas la tangente au point I au cercle ($C_1$). Cette droite coupe le cercle ($C_2$) aux points A et B et le cercle ($C_3$) au point C.

**2.** Calculer les distances AI, AB et IC.

**3.** Montrer que $\text{AC} = 2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)$ et vérifier que $\dfrac{\text{AC}}{\text{AB}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On note $\Phi$ le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**4.** Le point C′ est placé sur la figure.

**a.** Construire, à la règle et au compas, le point D du segment [AC′] tel que $\dfrac{\text{AC}'}{\text{AD}} = \Phi$.

**b.** Construire un triangle AB′C′ isocèle en B′ que $\dfrac{\text{AC}'}{\text{AB}'} = \Phi$. Un tel triangle est appelé un triangle d'or.
Les traits de construction doivent figurer sur la feuille.
Combien y-a-t-il de solutions ?

**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**

*L'unité de longueur n'est pas le centimètre*