∾ Baccalauréat L Amérique du Sud novembre 2004 ∾

Épreuve facultative novembre 2004

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

Le candidat doit traiter les deux premiers exercices et soit l'exercice 3, soit l'exercie 4

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **6 points**

Rappels

– On note Φ le nombre d'or dont la valeur exacte est $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$;
– Φ est l'unique nombre positif qui vérifie : $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.
– On dit que deux triangles PQR et STU sont « semblables » ou « de même forme » si les angles en P, Q, R dans le triangle PQR sont respectivement égaux aux angles en S, T, U dans le triangle STU, ce qui revient a dire que : $\dfrac{PQ}{ST} = \dfrac{PR}{SU} = \dfrac{QR}{TU}$.

On donne un triangle ABC tel que : BC = 1 , $\widehat{ABC} = 72^{\circ}$ et $\widehat{BCA} = 72^{\circ}$. (Voir l'annexe 1.)

On pose AB = AC = x. Le but des questions suivantes est de montrer que $x = \Phi$.

1. **a.** Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CAB}$.
   b. Construire à la règle et au compas la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. On explicitera la méthode utilisée.
   Cette bissectrice coupe [AC] en M.
2. **a.** Calculer les mesures en degrés des angles $\widehat{CBM}$ et $\widehat{CMB}$.
   En déduire que le triangle BCM est isocèle et que BM = 1.
   b. Justifier que les triangles ABC et BCM sont semblables.
   c. En déduire trois rapports de distances égaux.
3. **a.** Montrer que le triangle BAM est isocèle.
   b. En déduire que : CM = $x - 1$.
4. D'après les résultats de la question **2. c.** : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{CM}$.
   En déduire que x vérifie $x^2 - x - 1 = 0$ puis que $x = \Phi$.

On appelle triangle d'or tout triangle dont les angles mesurent 36°, 72° et 72°, c'est-à-dire tout triangle semblable au triangle ABC étudié dans cet exercice, c'est-à-dire tout triangle dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à 1, Φ et Φ.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Rappels

- a étant une constante réelle, la fonction $x \longmapsto \ln(ax)$ a pour fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- x et y étant deux reels strictement positifs : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
- x étant un réel strictement positif : $\exp(\ln x) = x$.

Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal.

La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels.
On note $p_0 = 20\times10^{-6}$.
Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geqslant p_0$, le niveau sonore perçu est de $f(p)$ décibels où :

$$f(p)=\dfrac{20}{\ln(10)}\ln\left(\dfrac{p}{p_0}\right),\quad \text{c'est-à-dire}\quad f(p)=\dfrac{20}{\ln(10)}\ln(50\,000p).$$

1. Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals ? de 0,2 Pascals ? de 0,02 Pascals ?

2. On note $k=\dfrac{20}{\ln 10}$ et $\text{I} = [p_0\,;\,+\infty[$.
Donc f est la fonction définie sur l'intervalle I par : $f(x) = k\ln(50\,000x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

a. Préciser la valeur de $f\left(p_0\right)$.

b. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

c. Interpréter les résultats du **a.** et du **b.** en termes de pression s'exerçant sur le tympan et de niveau sonore perçu.

3. À partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur.
Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.

4. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I : $f(10x) = k\ln(10)+f(x)$.
On en déduit que : $f(10x) = 20+f(x)$ *et on dit que :* « *le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par* 10 ».

b. Exprimer, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, $f(100x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

EXERCICE 3 — 7 points

Rappels

On note $p(\text{A})$ la probabilité d'un évènement A, « A et B » ou « A $\cap$ B » l'intersection de deux évènements A et B.

On note $p_{\text{B}}(\text{A})$ la probabilité qu'un évènement A se réalise, sachant qu'un évènement B (de probabilité non nulle) est déjà réalisé. On a : $p_{\text{B}}(\text{A})=\dfrac{p(\text{A}\cap\text{B})}{p(\text{B})}=\dfrac{p(\text{A et B}}{p(\text{B}}$.

On dispose de deux urnes numérotées 1 et 2.
L'urne 1 contient une boule blanche et une boule noire.
L'urne 2 contient deux boules noires et une boule blanche.
On réalise l'expérience aléatoire suivante: on tire au hasard une boule dans l'urne 1 et on la met dans l'urne 2, puis on tire au hasard une boule dans l'urne 2.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note :

N_1 l'évènement: « La boule tirée de l'urne 1 est noire » ;
B_1 l'évènement : « La boule tirée de l'urne I est blanche » ;
N_2 l'évènement : « La boule tirée de l'urne 2 est noire » ;

B_2 l'évènement : « La boule tirée de l'urne 2 est blanche ».

1. Donner les valeurs de $p(B_1)$ et $p(N_1)$.

2. Montrer que $p_{B_1}(B_2) = \dfrac{1}{2}$.
De la même façon donner les valeurs de $p_{B_1}(N_2)$, $p_{N_1}(B_2)$ et $p_{N_1}(N_2)$.

3. Compléter l'arbre de probabilités donné en **annexe 2**.

4. Calculer $p(B_1 \text{ et } B_2)$.

5. Montrer que $p(B_2) = \dfrac{3}{8}$ puis calculer $p(N_2)$.

6. Sachant qu'on vient de tirer une boule blanche dans l'urne 2, quelle est la probabilité qu'on ait tiré auparavant une boule blanche dans l'urne 1 ?

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

EXERCICE 4 — 7 points

Une année bissextile compte 366 *jours et une année non bissextile* 365 *jours.*
Une année est bissextile si son « numéro » est divisible par 4 sauf s'il s'agit d'un siècle.
Les siècles, années dont le « numéro » se termine par deux zéros, ne sont, en général, pas bissextiles sauf si leur « numéro » est divisible par 400.
Quelque exemples : 1996 *était bissextile,* 1997 *ne l'était pas,* 1900 *non plus mais* 2400 *le sera.*

1. Trouver les deux entiers naturels a et b inférieurs ou égaux à 6 tels que : $365 \equiv a \pmod 7$ et $366 \equiv b \pmod 7$.

2. **a.** En supposant que le premier janvier d'une année non bissextile soit un lundi, expliquer pourquoi le premier janvier de l'année suivante sera un mardi.

b. Si le premier janvier d'une année bissextile est un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier de l'année suivante?

3. Une période de quatre années consécutives compte $N = 3 \times 365 + 1 \times 366$ jours.
Sans calculer N, justifier que $N \equiv 5 \pmod 7$.

4. En supposant que le premier janvier d'une année soit un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier quatre ans plus tard? Expliquer la réponse.
Plus généralement, pour une date donnée, (par exemple le 1$^{\text{er}}$ janvier), *chaque période de* 4 *années produit un décalage de cinq jours dans le cycle des jours de la semaine.*

5. Compléter le tableau donné en **annexe 3**. Aucune justification n'est demandée.

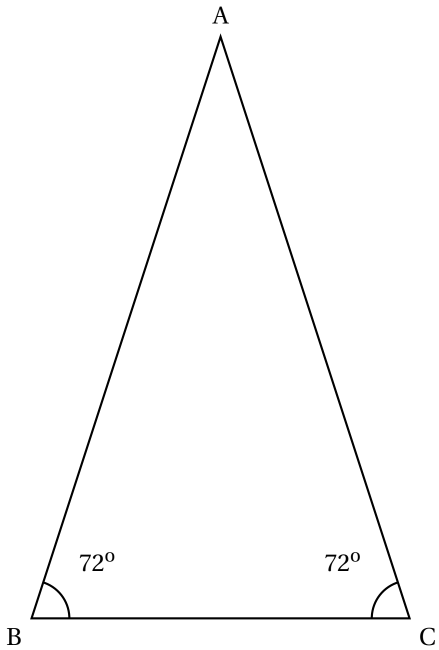
6. **a.** Expliquer pourquoi l'année 2004 est bissextile.

b. Sachant que le 29 février 2004 était un dimanche, quel jour de la semaine sera le 29 février 2008 ?
Quel jour de la semaine sera le 29 février 2012 ? Expliquer les réponses.

c. Quelle sera la prochaine année où le 29 février sera un dimanche ? Expliquer la réponse.

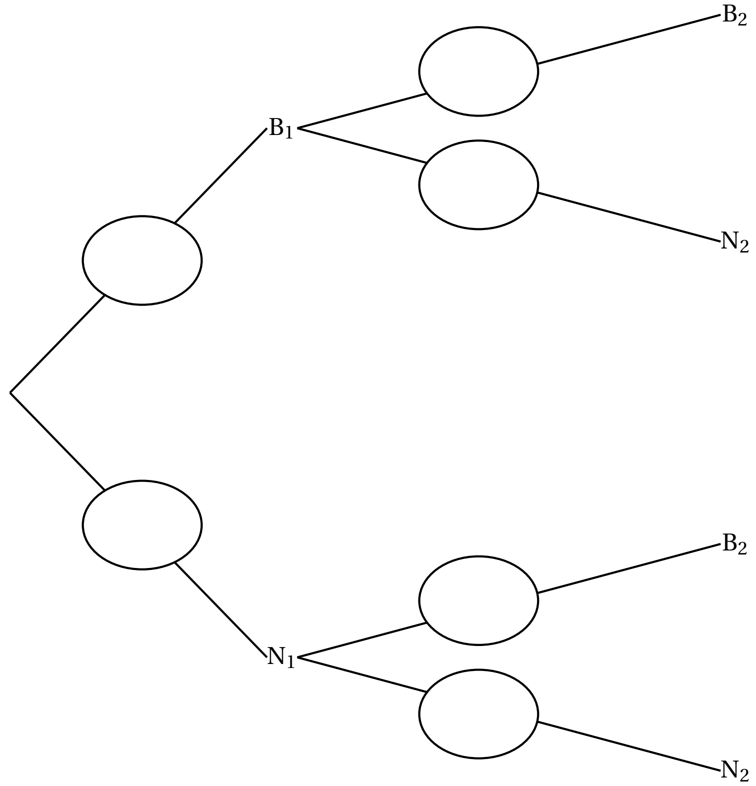
Annexe 1 (à rendre avec la copie)

Exercice 1
Unité : 5 cm



Annexe 2 (à rendre avec la copie si vous avez choisi l'exercice 3)

Exercice 3, question 3



Annexe 3 (à rendre avec la copie si vous avez choisi l'exercice 4)

Exercice 4, question 5

Nombre de périodes de quatre années	J = nombre de jours de décalage dans le cycle des jours de la semaine	Reste de la division de J par 7
0	0	0
1	5	5
2	10	3
3		
4		
5		
6		
7		