Baccalauréat L facultatif juin 2004

L'usage d'une calculatrice est autorisée | 3 heures

Le candidat doit traiter **trois** exercices
Obligatoirement : l'exercice 1 et l'exercice 2
Au choix : l'exercice 3 **ou** l'exercice 4

Exercice 1 obligatoire **8 points**

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\ln x}{x}.$$

On rappelle que e est le nombre tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La courbe $(\mathcal{C})$ est donnée en annexe à rendre avec la copie.
Cette courbe permettra de contrôler l'exactitude de certains résultats, mais ne doit pas être utilisée pour justifier les réponses.

Partie I

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + 2\ln x.$$

– On note u' la dérivée de la fonction u. Calculer $u'(x)$.
– Dresser le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
– On admet l'existence d'un nombre unique a, appartenant à l'intervalle $[1 ; 3]$ tel que $u(a) = 0$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant le signe de $u(x)$.

x	1		a		3
$u(x)$			0		

Partie II

a. On note f' la dérivée de la fonction f.
On admet que pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{2x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie I.
Déterminer selon les valeurs de x le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f (on ne calculera pas $f(a)$).
– On note A le point de coordonnées $\left(1 ; \dfrac{1}{2}\right)$.
Montrer que la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e est parallèle à la droite (OA).
– Tracer la droite (OA) et la tangente (T) sur l'annexe à rendre avec la copie.
Placer le point B de coordonnées $(a ; f(a))$ et la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point B.

Exercice 2 **6 points**

Dans tout l'exercice, le format d'un rectangle est le quotient de sa longueur par sa largeur.
Le but de cet exercice est d'étudier deux formats différents.
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A - Étude d'un premier format

Les dimensions d'une feuille rectangulaire (appelée R_1) sont l et L (voir figure 1). Ainsi le format de R_1 est égal à $\dfrac{L}{l}$.
On coupe R_1 en deux rectangles égaux, appelés R_2 (voir figure 2).
On suppose que $l < L < 2l$.

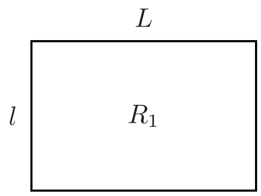


Figure 1

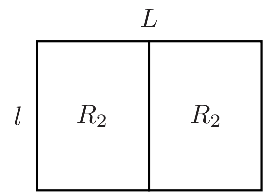


Figure 1

– Donner le format d'une feuille R_2 en fonction de L et l.
– On suppose que les feuilles R_1 et R_2 ont le même format.
Montrer alors que le format $\dfrac{L}{l}$ est égal à $\sqrt{2}$.

Partie B - Étude d'un second format

Soit un rectangle ABCD de longueur AB $= L$ et de largeur AD $= l$.
On suppose que $l < L < 2l$.
– On considère le carré AEFD construit dans le rectangle ABCD (voir figure 3).
Donner le format du rectangle EBCF en fonction de L et l.

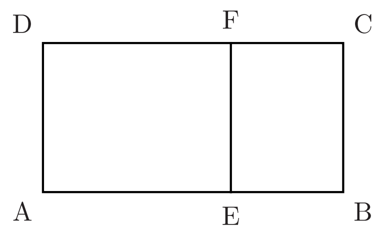


Figure 3

Vérifier que ce format peut s'écrire $\dfrac{1}{\dfrac{L}{l} - 1}$.

– On pose $\dfrac{L}{l} = x$. On admet que x appartient à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
On se propose de trouver une valeur de x telle que les deux rectangles ABCD et EBCF aient le même format.

a. Montrer que les rectangles ABCD et EBCF ont le même format si $x = \dfrac{1}{x-1}$.

b. On admet que, dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, résoudre l'équation $x = \dfrac{1}{x-1}$, revient à résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{E}_1$).
On rappelle que le nombre d'or est $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que Φ est solution de l'équation (E_1).

c. Conclure.

Exercice 3 (au choix) **6 points**

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 6$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \qquad (n \quad \text{est un entier naturel}).$$

– On pose $v_n = u_n - 4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Montrer que $v_n = 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

– On pose $a_n = \ln v_n$.
a. Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2\ln 2$.
b. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
c. Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13\ln 2$.

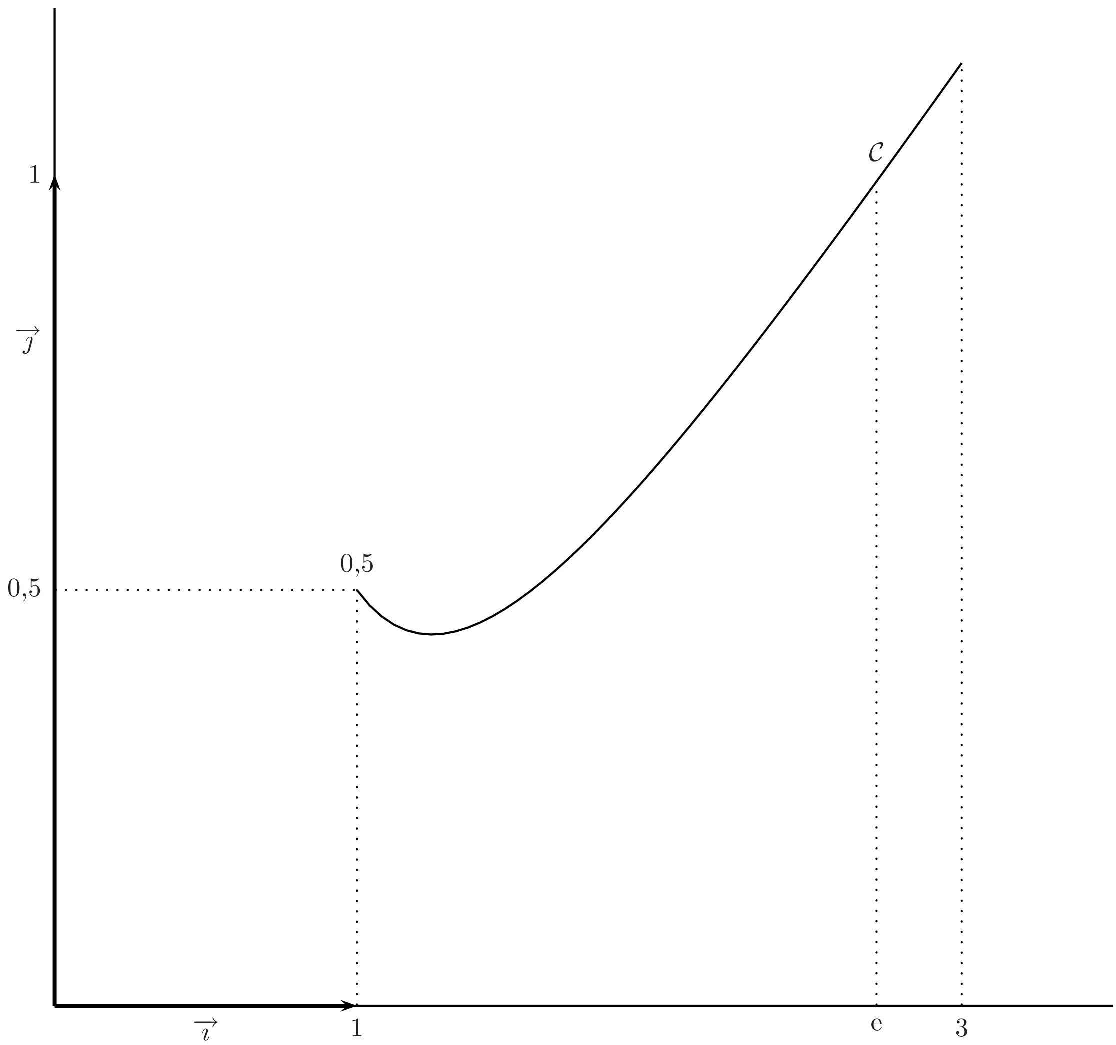
Exercice 4 (au choix) **6 points**

Le tableau suivant contient trois lignes comportant chacune une situation et trois affirmations.
Pour chaque affirmation, faire figurer le mot « vrai » ou le mot « faux » en toutes lettres dans la case correspondante du tableau de l'annexe, à rendre avec la copie.

S_1	On sait que : $10^7 \equiv 5$ (modulo 17) et $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17)	$10^7 + 10^{11} \equiv 5$ (modulo 17)	$10^{16k} \equiv 1$ (modulo 17)	$10^{16k+7} \equiv 1$ (modulo 17)
S_2	Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$	La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$	$f\left(\sqrt{\text{e}}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{\text{e}}}{\text{e}}$
S_3	À l'entraînement, un basketteur effectue des tentatives pour marquer un panier. Chaque tentative a 8 chances sur 10 de réussir. À chaque tentative la probabilité de succès est donc égale à $\dfrac{8}{10}$. Le joueur effectue 4 tentatives successives (on admet qu'elles sont indépendantes).	La probabilité de réussir les 4 tentatives est 1	La probabilité de réussir les 4 tentatives est $\dfrac{256}{625}$	La probabilité de réussir exactement 3 tentatives est $\dfrac{256}{625}$

Annexe de l'exercice 1

à compléter et à rendre avec la copie



Annexe de l'exercice 4

à rendre avec la copie si l'exercice est choisi

Tableau à compléter

S_1	On sait que : $10^7 \equiv 5$ (modulo 17) et $10^{16} \equiv 1 \quad$ (modulo 17)			
S_2	Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x$			
S_3	À l'entraînement, un basketteur effectue des tentatives pour marquer un panier. Chaque tentative a 8 chances sur 10 de réussir. À chaque tentative la probabilité de succès est donc égale à $\dfrac{8}{10}$. Le joueur effectue 4 tentatives successives (on admet qu'elles sont indépendantes).			