

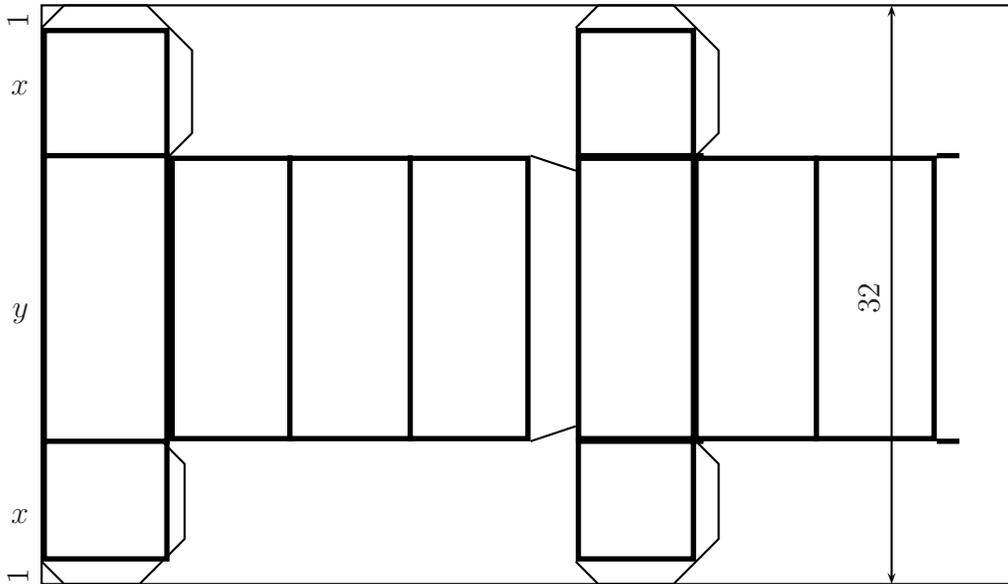
Durée de l'épreuve : 3 heures

Le candidat doit traiter TROIS exercices : le 1, le 2 et le 3 ou le 4

**Exercice 1 obligatoire**

**7 points**

Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de 32 cm de large dans laquelle il trace et découpe les patrons des boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessin ci-dessous



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de  $x$  cm de côté, munies de deux languettes de 1 cm de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont  $x$  et  $y$ , ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1) Le fabricant utilise toute la largeur de la bande de carton. On a donc  $y = 30 - 2x$ .

a) Expliquer pourquoi on a nécessairement :  $0 < x < 15$ .

b) Démontrer que le volume  $V$  en  $\text{cm}^3$ , de la boîte est donné par la formule

$$V = 30x^2 - 2x^3.$$

2) Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 15]$  par :  $f(x) = 30x^2 - 2x^3$ .

a) Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  et étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0; 15]$ .

b) En déduire le tableau des variations de la fonction  $f$  sur cet intervalle.

3) a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs :

$x$	1	2	4	6	8	10	12	14	15
$f(x)$									

b) Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un plan muni d'un repère orthogonal. On prendra 1 cm comme unité en abscisses et 1 cm pour  $100 \text{ cm}^3$  en ordonnées.

4) a) Pour quelle valeur de  $x$ , le volume  $V$  est-il maximum? Quelle est alors la valeur de ce volume? Quelle particularité présente la boîte dans ce cas-là?

b) Le fabricant veut que la boîte obtenue ait un volume de  $500 \text{ cm}^3$  et que  $x$  soit inférieur à 10.

Déterminer, à l'aide du graphique, la valeur de  $x$  qu'il doit choisir.

Vérifier par le calcul puis calculer la valeur de  $y$  correspondante.

### Exercice 2 obligatoire

6 points

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

#### Partie A

Soit  $N_0$  le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant  $t = 0$ ;

Soit  $N_1$  le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après;

Soit  $N_k$  le nombre d'atomes de carbone 14 après  $k$  siècles,  $k$  entier naturel.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1) Justifier que la suite  $(N_k)$  est une suite géométrique de raison 0,987 6

2) Exprimer  $N_k$  en fonction de  $N_0$  et de l'entier  $k$ .

3) Quelle est la limite de la suite  $(N_k)$ ? Justifier.

#### Partie B

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la terre est constant.

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la partie A.

1) Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du carbone 14 initial. Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.

2) On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1 % du carbone 14 initial. En utilisant des propriétés de la fonction logarithme népérien, déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

### Exercice 3 (au choix)

7 points

Toutes les constructions demandées seront effectuées sur la feuille annexe.

On laissera apparents les traits de construction

Le segment  $[AB]$  a pour longueur l'unité.

1) Construire, à la règle et au compas :

a) le milieu  $I$  du segment  $[AB]$ ,

b) la perpendiculaire  $\mathcal{D}$  à la droite  $(AB)$  passant par  $B$ .

2) a) Construire un point  $C$  de la droite  $\mathcal{D}$  tel que  $BC = BI$ .

b) Calculer  $AC$ .

3) a) Construire les points  $D$  et  $M$  suivants :



« Obtenir un multiple de 10 pour la première fois au  $n$ -ième tirage ».  
Calculer les probabilités  $p(A_2)$ ,  $p(A_3)$  et  $p(A_4)$  des évènements  $A_2$ ,  $A_3$ ,  
 $A_4$ .