EXERCICE 1 (10 POINTS)

Partie I : On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [0 ; 10] par $f(x) = x^2 - 10x + 100$.

1. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I et montrer qu'elle admet un minimum que l'on précisera.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 81$.

Partie II : On considère un triangle équilateral ABC dont les côtés ont pour longueur 10 centimètres. Le point I est le milieu de [AB] et M est un point du segment [AB]. Le point N est le point du segment [AC] tel que AN = AM.
Le point H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle ANB.

1. Faire une figure.
2. L'objectif de cette question est de déterminer par le calcul le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale. Les distances sont exprimées en centimètres.

On pose AM $= x$.

a. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.

b. Déterminer en fonction de x la distance HB.

c. Montrer que HN $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

d. Montrer que $BN^2 = f(x)$.

e. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment [AB] pour lequel BN^2 est minimal.

3. L'objectif de cette question est de retrouver géométriquement le résultat de la question précédente.

a. Montrer que la distance BN est minimale lorsque l'angle $\widehat{ANB}$ est droit.

b. Vérifier que l'on retrouve bien la réponse à la question 2.

EXERCICE 2 (10 POINTS)

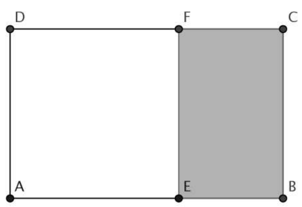
1. On appelle nombre d'or le réel noté $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Démontrer que ce nombre vérifie la relation (1) : $\phi = \dfrac{1}{\phi - 1}$.

2. On appelle rectangle d'or, un rectangle dont le quotient de la longueur par la largeur est égal au nombre d'or.
On donne quatre points A, B, C et D tels que le rectangle ABCD soit un rectangle d'or. (voir figure ci-dessous).
On appelle respectivement E et F les points des segments [AB] et [CD] tels que le quadrilatère AEFD soit un carré.
On pose AD = ℓ.

a. Exprimer la longueur AB en fonction de ϕ et de ℓ.

b. Montrer que $\dfrac{EF}{FC} = \dfrac{1}{\phi - 1}$.



c. Que peut-on en déduire pour le rectangle grisé EBCF ?

3. Soil K le milieu de [AE].

a. Exprimer KF en fonction de ℓ.

b. Montrer que KB = $(\phi - \dfrac{1}{2}) \times \ell$.

c. En déduire que KF = KB.

En déduire une construction géometrique d'un segment dont la longueur est le nombre d'or (faire une figure et expliquer les étapes de la construction).