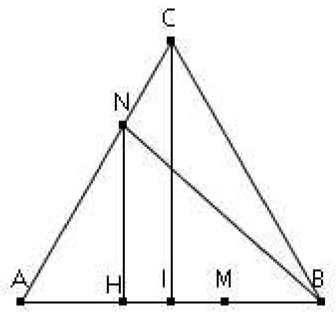
CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 3 TERMINALE L

EXERCICE 1 :

Partie I : 1. La dérivée de f est $f'(x) = 2x - 10 = 2(x-5)$. Cette dérivée s'annule pour $x = 5$, est positive sur [5; 10] et négative sur [0; 5]. Donc la fonction f est décroissante sur [0; 5] et croissante sur [5; 10]. Donc elle admet un minimum atteint pour $x = 5$ et vaut $f(5) = 75$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 81$ équivaut à $x^2 - 10x + 100 = 81$ équivaut à $x^2 - 10x + 19 = 0$. On cherche la forme canonique de $x^2 - 10x + 19 = (x-5)^2 - 25 + 19 = (x-5)^2 - 6 = (x - 5 - \sqrt{6})(x - 5 + \sqrt{6})$. Les solutions sont donc $5 - \sqrt{6}$ et $5 + \sqrt{6}$.

Partie II : 1. Figure ci-contre:



2. a. Le point M est sur le segment [AB], donc AM est compris entre 0 et 10, donc $x \in [0; 10]$.

b. Le triangle AMN est équilatéral puisque AM = AN et que l'angle $\widehat{NAM} = 60°$. Donc le point H est aussi le milieu de [AM].

Ainsi $HB = BM + MH = 10 - x + \frac{x}{2} = 10 - \frac{x}{2}$.

c. Dans le triangle ACI, on utilise le théorème de Thalès, avec (NH) parallèle à (CI): $\frac{HN}{CI} = \frac{AN}{AC}$, d'où $HN = \frac{AN}{AC} CI = \frac{x}{10} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

d. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle BNH rectangle en H :

$BN^2 = BH^2 + HN^2 = (10 - \frac{x}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} x)^2 = 100 - 10x + \frac{x^2}{4} + \frac{3\ x^2}{4} = f(x)$.

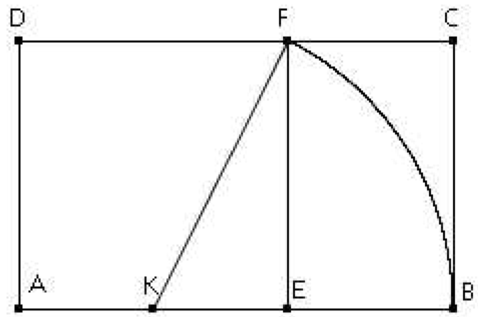
e. BN^2 est minimal lorsque $f(x)$ est minimale, c'est-à-dire pour $x = 5$, et $BN^2 = 75$.

3. La distance BN est minimale lorsque (BN) est perpendiculaire à (AC); donc lorsque N est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. Ce triangle étant équilatéral, le point N est alors le milieu de [AC], et AN = AM = 5.

EXERCICE 2 :

1. On a $\frac{1}{\phi - 1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{2}{1+\sqrt{5} - 2} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$.

2. a. On sait que $\frac{AB}{AD} = \phi$, donc $AB = \phi \times \ell$.



b. $\frac{EF}{FC} = \frac{AD}{AB - AE} = \frac{l}{\phi l - l} = \frac{l}{l(\phi - 1)} = \frac{1}{\phi - 1} = \phi$.

c. On en déduit que le rectangle EBCF est aussi un rectangle d'or puisque le quotient de sa longueur sur sa largeur égale le nombre d'or.

3. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KEF rectangle en E :

$KF^2 = KE^2 + EF^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2 = \frac{l^2}{4} + l^2 = \frac{5\ l^2}{4}$, donc $KF = \frac{l\sqrt{5}}{2}$.

b. Ona $KB = AB - AK = \phi \times l - \frac{l}{2} = (\phi - \frac{1}{2}) \times \ell$.

c. En fait, $(\phi - \frac{1}{2}) \times l = (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}) \times l = \frac{l\sqrt{5}}{2} = KF$, donc KF = KB.

Une construction géométrique d'un segment dont la longueur est le nombre d'or : On trace AE = 1, puis K milieu de [AE], puis F sur la perpendiculaire à (AE) passant par E et tel que EF = EA. Puis le cercle de centre K passant par F coupe [AE] en B, et $AB = \phi$.