BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2004

ÉPREUVE FACULTATIVE DE MATHÉMATIQUES

Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Le candidat traitera :

Obligatoirement : **l'exercice 1 et l'exercice 2.**

Au choix : **soit l'exercice 3 soit l'exercice 4.**

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte 6 pages, dont les annexes, pages 5 et 6, sont à rendre avec la copie.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (8 points)

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 3] par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\ln x}{x}$.

On rappelle que e est le nombre tel que $\ln e = 1$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La courbe (C) est donnée en annexe à rendre avec la copie, page 5.

Cette courbe permettra de contrôler l'exactitude de certains résultats, mais ne doit pas être utilisée pour justifier les réponses.

Partie I

On considère la fonction u définie sur l'intervalle [1 ; 3] par $u(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$.

1 - On note u' la dérivée de la fonction u. Calculer $u'(x)$.

2 - Dresser le tableau de variation de la fonction u sur l'intervalle [1 ; 3].

3 - On admet l'existence d'un nombre unique a, appartenant à l'intervalle [1 ; 3] tel que $u(a) = 0$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant le signe de $u(x)$.

x	1		a		3
$u(x)$			0		

Partie II

1 - **a)** On note f' la dérivée de la fonction f.

On admet que pour tout x de l'intervalle [1 ; 3], $f'(x) = \frac{u(x)}{2x^2}$, où u est la fonction définie dans la **partie I**.

Déterminer selon les valeurs de x le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 3].

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f (on ne calculera pas $f(a)$).

2 - On note A le point de coordonnées $\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$.

Montrer que la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse e est parallèle à la droite (OA).

3 - Tracer la droite (OA) et la tangente (T) sur l'annexe à rendre avec la copie, page 5.

Placer le point B de coordonnées $(a ; f(a))$ et la tangente à la courbe (C) au point B.

Exercice 2 (6 points)

Dans tout l'exercice, le format d'un rectangle est le quotient de sa longueur par sa largeur.
Le but de cet exercice est d'étudier deux formats différents.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Étude d'un premier format

Les dimensions d'une feuille rectangulaire (appelée R_1) sont ℓ et L (voir figure 1). Ainsi le format de R_1 est égal à $\frac{L}{\ell}$.

On coupe R_1 en 2 rectangles égaux, appelés R_2 (voir figure 2).

On suppose que $\ell < L < 2\ell$

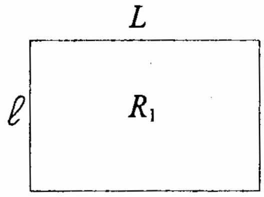


Figure 1

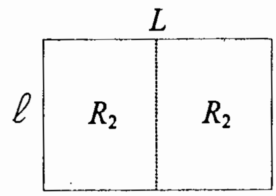


Figure 2

1 - Donner le format d'une feuille R_2 en fonction de L et ℓ

2 - On suppose que les feuilles R_1 et R_2 ont le même format.
Montrer alors que le format $\frac{L}{\ell}$ est égal à $\sqrt{2}$.

Partie B - Étude d'un second format

Soit un rectangle $ABCD$ de longueur $AB = L$ et de largeur $AD = \ell$

On suppose que $\ell < L < 2\ell$

1 - On considère le carré $AEFD$ construit dans le rectangle $ABCD$ (voir figure 3).
Donner le format du rectangle $EBCF$ en fonction de L et ℓ
Vérifier que ce format peut s'écrire $\dfrac{1}{\frac{L}{\ell}-1}$.

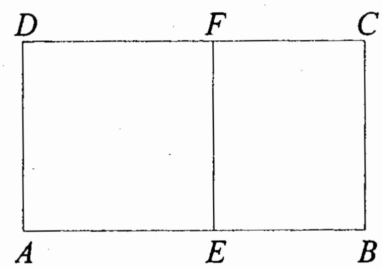


Figure 3

2 - On pose $\frac{L}{\ell} = x$. On admet que x appartient à l'intervalle $]1\ ;+\infty[$.
On se propose de trouver une valeur de x telle que les 2 rectangles $ABCD$ et $EBCF$ aient le même format.

a) Montrer que les rectangles $ABCD$ et $EBCF$ ont le même format si $x = \dfrac{1}{x-1}$.

b) On admet que, dans l'intervalle $]1\ ;+\infty[$, résoudre l'équation $x = \dfrac{1}{x-1}$, revient à résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ (E1).
On rappelle que le nombre d'or est $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que Φ est solution de l'équation (E1).

c) Conclure.

Exercice 3 (au choix) (6 points)

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 6$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \quad (n \text{ est un entier naturel}).$$

1 - On pose $v_n = u_n - 4$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Montrer que $v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

2 - On pose $a_n = \ln v_n$.

a) Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2\ln 2$.

b) Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

c) Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13 \ln 2$.

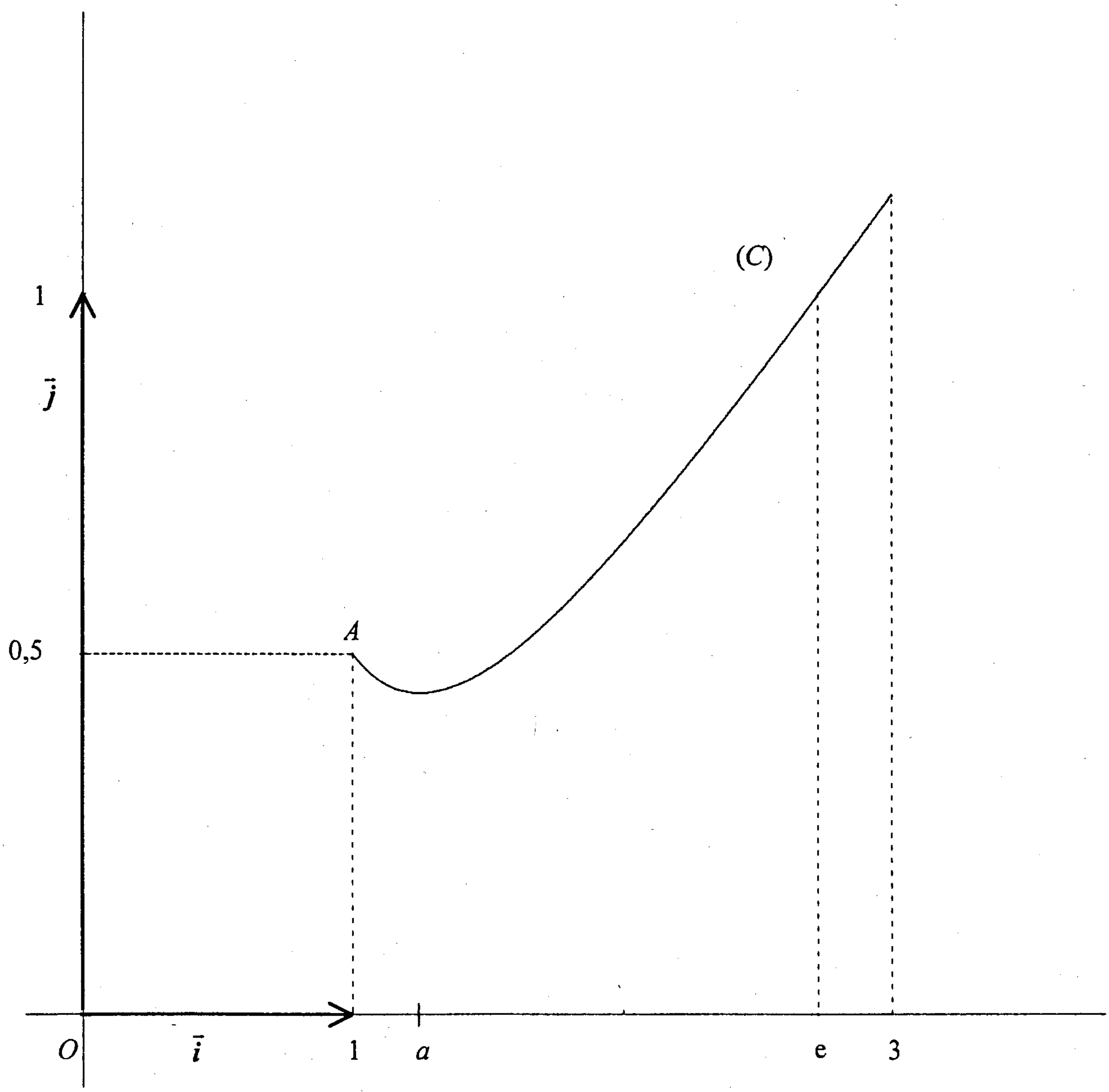
Exercice 4 (au choix) (6 points)

Le tableau suivant contient trois lignes comportant chacune une situation et trois affirmations.
Pour chaque affirmation, faire figurer le mot « vrai » ou le mot « faux » en toutes lettres dans la case correspondante du tableau de l'annexe, à rendre avec la copie, page 6.

S1	On sait que : $10^7 \equiv 5$ (modulo 17) et $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).	$10^7 + 10^{16} \equiv 5$ (modulo 17)	$10^{16k} \equiv 1$ (modulo 17)	$10^{16k+7} \equiv 1$ (modulo 17)
S2	Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x} + \ln x$.	$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$	La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$	$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{e}}{e}$
S3	À l'entraînement, un basketteur effectue des tentatives pour marquer un panier. Chaque tentative a 8 chances sur 10 de réussir. À chaque tentative la probabilité de succès est donc égale à $\frac{8}{10}$. Le joueur effectue 4 tentatives successives (on admet qu'elles sont indépendantes).	La probabilité de réussir les 4 tentatives est 1	La probabilité de réussir les 4 tentatives est $\frac{256}{625}$	La probabilité de réussir exactement 3 tentatives est $\frac{256}{625}$

Annexe de l'exercice 1

à compléter et à rendre avec la copie



Annexe de l'exercice 4

à rendre avec la copie si l'exercice est choisi

Tableau à compléter

S1	On sait que : $10^7 \equiv 5$ (modulo 17) et $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).			
S2	Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x$.			
S3	À l'entraînement, un basketteur effectue des tentatives pour marquer un panier. Chaque tentative a 8 chances sur 10 de réussir. À chaque tentative la probabilité de succès est donc égale à $\dfrac{8}{10}$. Le joueur effectue 4 tentatives successives (on admet qu'elles sont indépendantes).			