

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

L'usage d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1

7 points

Partie I

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$, strictement décroissante, dont la représentation graphique C dans un repère orthonormal est donnée ci-contre.

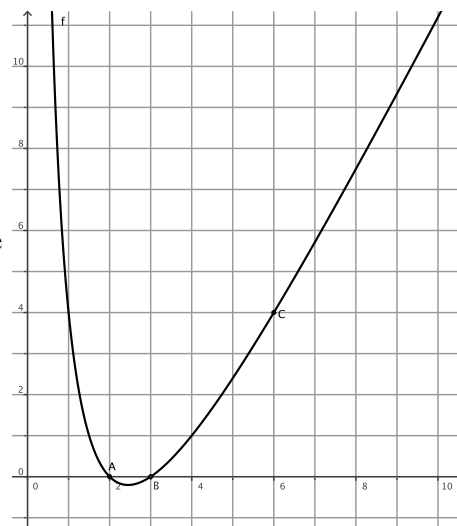
La courbe C contient les points $A(2 ; 0)$, $B(3 ; 0)$ et $C(6 ; 4)$.

1. En utilisant la représentation graphique, donner, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

2. On suppose que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 10]$ on a

$$f(x) = 2x - 10 + \frac{12}{x}.$$

Retrouver par le calcul, le résultat du 1.



Partie II

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par : $F(x) = x^2 - 10x + 12\ln(x)$.

1. Montrer que F a pour dérivée la fonction f de la partie I.

2. Étudier les variations de la fonction F sur l'intervalle $[1 ; 10]$, puis dresser son tableau de variations.

3. C_F désigne la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormal.

a. Soit la droite (d) , tangente à la courbe C_F en son point d'abscisse 6.

Montrer que le coefficient directeur de la droite (d) est égal à 4.

b. Préciser le nombre de solutions de l'équation $F(x) = 0$.

c. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 0,1 près de chacune des solutions.

EXERCICE 2

7 points

Le but de l'exercice est de construire un pentagone régulier $ABCDE$ inscrit dans un cercle de centre O .

On rappelle que, dans ce cas, les angles géométriques $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$ et $\widehat{EOA}$ ont tous pour mesure 72° .

Toutes les constructions demandées seront effectuées à la règle et au compas sur la feuille annexe (à rendre avec la copie). Laisser les traits de construction apparents.

MON (donné en annexe) est un triangle rectangle isocèle en M . Les segments $[OM]$ et $[MN]$ ont pour longueur l'unité.

1. Construire, à la règle et au compas, sur la feuille annexe :

a. La médiatrice (d) du segment $[OM]$ (on appelle I le milieu de $[OM]$) ;

b. le point A , intersection du cercle de centre I passant par N avec la demi droite $[OM)$.

2. a. Calculer IN .

b. En déduire que $OA = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3. a. Tracer le cercle de centre O passant par A . Placer les points B et E , intersections de ce cercle avec la médiatrice (d) .

On admet que l'angle $\widehat{IOB}$ a pour mesure 72° .

b. En déduire que les points A , B et E sont trois sommets d'un pentagone régulier $ABCDE$ inscrit dans le cercle de centre O dont on achèvera la construction.

EXERCICE 3

6 points

Le but de l'exercice est de prouver pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité : "un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3".

1. Un exemple.

- a) Pour tout entier naturel n , que signifie la phrase " n est congru à 1 modulo 3" ?
- b) Traduire à l'aide d'une congruence " n est divisible par 3".
- c) Pour chacun des nombres suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 : 10, 100, 1 000, 10^p où p est un entier positif.
- d) Déterminer le plus petit entier positif auquel est congru le nombre 4 520 modulo 3.
- e) Trouver le reste de la division de 5 112 par 3.

2. Quelques généralisations.

On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a , b , c et d entre 0 et 9 tels que $a \neq 0$ et

$N = 1000a + 100b + 10c + d$. Le chiffre des unités est d , celui des dizaines c , des centaines b et des milliers a .

- b) Montrer que $N \equiv a + b + c + d \pmod{3}$.
- c) Justifier, pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.
- d) Énoncer un critère analogue de divisibilité par 9, et le démontrer pour les nombres à quatre chiffres.

Annexe à rendre avec la copie

