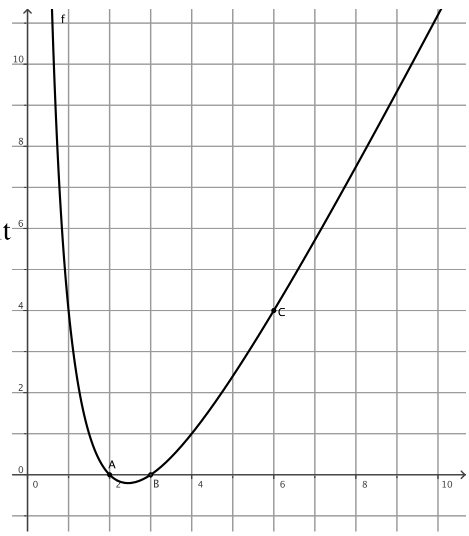
CORRECTION BAC BLANC TERMINALE L

EXERCICE 1



Partie I: 1. La fonction f est positive sur [1; 2] et sur [3; 10] et elle est négative sur [2; 3].

2. Il s'agit de résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$: $2x - 10 + \dfrac{12}{x} \geqslant 0$; on réduit au même dénominateur: $\dfrac{2x^2 - 10x + 12}{x} \geqslant 0$. Sur l'intervalle [1; 10], le dénominateur est strictement positif, donc le signe est donné par le signe de $2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6) = 2[(x - \dfrac{5}{2})^2 - \dfrac{25}{4} + 6] =$ $2[(x - \dfrac{5}{2})^2 - \dfrac{1}{4}] = 2(x - \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2})(x - \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}) = 2(x-3)(x-2)$ qui est positif lorsque $x \in]-\infty ; 2] \cup [3; +\infty[$ et négatif lorsque $x \in [2; 3]$; on retrouve bien le résultat de la question 1.

Partie II: 1. La fonction F a pour dérivée $F'(x) = 2x - 10 + \dfrac{12}{x} = f(x)$, donc a le même signe que f .

2. Les variations de la fonction F sur l'intervalle [1 ; 10]: comme la fonction f est positive sur [1; 2] et sur [3; 10] et négative sur [2; 3], alors la fonction F est croissante sur [1; 2], puis décroissante sur [2; 3], puis croissante sur [3; 10]. Son tableau de variations:

x	1		2		3		10
$f(x)$		+	0	–	0	+	
F(x)	–9	↗	F(2)	↘	F(3)	↗	12ln10

$F(2) = -16 + 12\ln 2 \approx -7{,}68 < 0$ et

$F(3) = -21 + 12\ln 3 \approx -7{,}82 < 0$.

3. a. Le coefficient directeur de la droite (d), tangente à la courbe C_F en son point d'abscisse 6 est le nombre dérivé de F en $x = 6$, soit

$F'(6) = f(6) = 2\times 6 - 10 + \dfrac{12}{6} = 12 - 10 + 2 = 4$.

b. Sur l'intervalle [1; 3], F(x) est strictement négatif; sur l'intervalle [3; 10], la fonction F est croissante et F(x) passe d'une valeur négative à une valeur positive, donc il y a une seule solution à l'équation F(x) = 0 sur l'intervalle [1; 10].

c. F(6) < 0 et F(7) > 0, donc la solution est entre 6 et 7; et une valeur approchée à 0,1 près de cette solution est 6,6.

EXERCICE 3

1. Un exemple: a) Pour tout entier naturel n, la phrase " n est congru à 1 modulo 3" signifie que le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1.

b) " n est divisible par 3 " se traduit par « n est congru à 0 modulo 3 ».

c) $10 \equiv 1$ modulo 3, $100 \equiv 1$ modulo 3, $1000 \equiv 1$ modulo 3, et pour tout entier positif p, $10^p \equiv 1$ modulo 3.

d) $4\,520 \equiv 1$ modulo 3 car $4520 = 1506 \times 3 + 2$.

e) Le reste de la division de 5 112 par 3 est 0 car $5\,112 = 1704 \times 3$. Donc 5112 est divisible par 3.

2. b) On sait que pour tout entier positif p, $10^p \equiv 1$ modulo 3, donc en utilisant les propriétés sur les congruences, on obtient que $N \equiv 1000a + 100b + 10c + d \equiv a + b + c + d$ modulo 3.

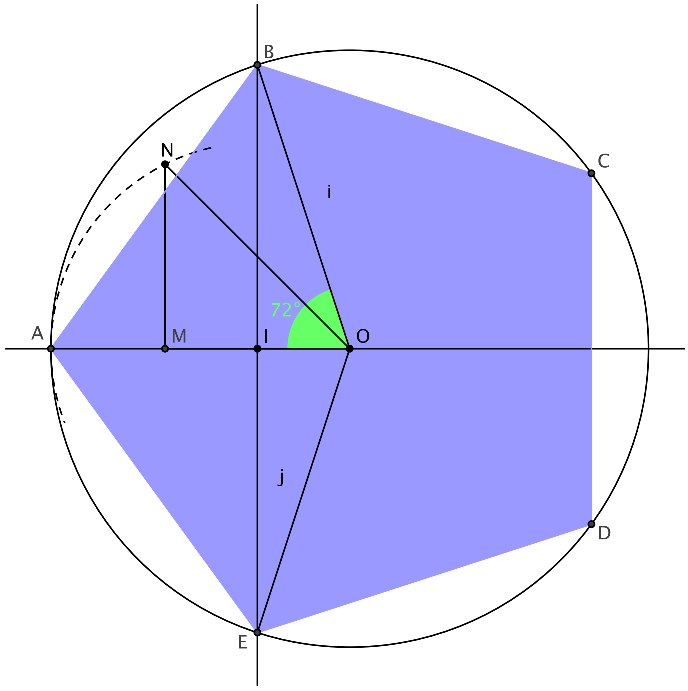
c) Ainsi N est divisible par 3 si a + b + c + d est congru à 0 modulo 3, soit divisible par 3. Réciproquement, si la somme des chiffres de N est divisible par 3, alors $N \equiv 0$ modulo 3, et N est divisible par 3. Donc *"un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3"*.

d) On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a, b, c et d entre 0 et 9 tels que $a \neq 0$ et $N = 1000a + 100b + 10c + d$. On a pour tout entier positif p, $10^p \equiv 1$ modulo 9, car $10^p = 99...9 + 1 = 9\times 11...1 + 1$. Donc en utilisant les propriétés sur les congruences, on obtient $N \equiv 1000a + 100b + 10c + d \equiv a + b + c + d$ modulo 9. Ainsi N est divisible par 9 si a + b + c + d est congru à 0 modulo 9, soit divisible par 9. Réciproquement, si la somme des chiffres de N est divisible par 9, alors $N \equiv 0$ modulo 9, et N est divisible par 9. Donc *"un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9"*.

EXERCICE 2

les angles géométriques $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$ et $\widehat{EOA}$ ont tous pour mesure 72°.

1. Construction à la règle et au compas de : La médiatrice (d) du segment [OM] (on appelle I le milieu de [OM]); le point A, intersection du cercle de centre I passant par N avec la demi droite [OM); le cercle de centre O passant par A; les points B et E, intersections de ce cercle avec la médiatrice (d); le pentagone régulier ABCDE inscrit dans le cercle de centre O.



2. a. Le triangle IMN est rectangle en M et MN = 1, IM = 0,5, donc en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient

$IN^2 = MN^2 + IM^2 = 1 + 0{,}25 = 1{,}25 = \dfrac{5}{4}$,

soit $IN = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b. Le point A étant sur le cercle de centre I et de rayon IN, $IA = IN = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, donc

$OA = OI + IA = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. a. Comme l'angle $\widehat{IOB}$ a pour mesure 72°, alors $\widehat{AOB} = 72°$.

b. Les points B et E sont sur la droite (d) qui est la médiatrice de [OM], donc BM = OB = OE = ME;
donc les triangles OMB et OME sont isométriques, donc les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{EOA}$ sont de même mesure 72°.
Donc les points A, B et E sont trois sommets d'un pentagone régulier ABCDE inscrit dans le cercle de centre O.