EXPERIENCE ALEATOIRE ET PROBABILITES

A. Généralités : le but de ce chapitre est de modéliser les résultats d'une expérience aléatoire ; cette expérience aléatoire comporte un nombre fini **d'issues** ; on désigne par Ω l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire, et on l'appelle **l'univers** ; si les issues sont notées e_i, pour i allant de 1 à n, on a $\Omega = \{ e_1, e_2, ..., e_n \}$. Le nombre n d'issues est le **cardinal** de l'ensemble Ω, noté card(Ω) = n.

Un **événement** A est une partie de Ω ; il est donc constitué d'un certain nombre d'issues de Ω ; le nombre d'éléments de A est son cardinal, noté card(A).
L'événement **complémentaire** de A, ou événement **contraire** de A, noté $\overline{\mathbf{A}}$, est l'événement contenant tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
Un événement **élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue (à un seul élément).
L'événement Ω est l'événement **certain**.
L'événement $\varnothing$ (ensemble vide) est l'événement **impossible**.

Soient A et B deux événements :
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ est l'événement constitué des éléments de A et des éléments de B (lire : A union B); $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$ **.**
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ est l'événement contenant les éléments qui sont à la fois dans A et dans B (lire A inter B); $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$ **.**
Les événements A et B sont **disjoints**, ou **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

B. Probabilité d'un événement : On définit, sur cette expérience aléatoire, une **loi de probabilité** P qui à une issue e_i associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1 et telle que la somme de tous les p_i soit égale à 1. On dit que la probabilité d'obtenir l'issue e_i est le nombre p_i. On note P({ e_i }) = p_i.
La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des p_i pour tous les éléments e_i de A.
Exemple : Si A = $\{ e_1, e_3, e_5 \}$ alors P(A) = $p_1 + p_3 + p_5$.

Propriétés des probabilités : P(Ω) = 1 ; P($\varnothing$) = 0 ; pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(A) + P(\overline{\mathbf{A}}) = 1$;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Cas de l'équiprobabilité : si tous les événements élémentaires { e_i } ont la même probabilité (P({ e_i }) = 1/Card(Ω)) alors
$P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

C. Loi de Bernoulli : On considère une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, appelées succès et échec. Cette expérience s'appelle une épreuve de Bernoulli.
On considère alors la variable aléatoire X définie par :
X = 1 si l'issue de l'épreuve de Bernoulli est le succès, avec une probabilité p ;
X = 0 si l'issue de l'épreuve de Bernoulli est l'échec avec une probabilité $1 - p$.
On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli.

D. Probabilités conditionnelles : Sur un univers Ω, on considère deux événements A et B tels que $p(A) \neq 0$.
On définit alors la probabilité de l'événement B sachant A, noté $p_A(B)$ par $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.
Propriétés : $p(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = p(A) \times p_A(B)$;
Si $p(B) \neq 0$, alors $p(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = p(B) \times p_B(A)$.

Indépendance de deux événements : Sur un univers Ω, on dit que deux événements A et B sont indépendants si $p(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = p(A) \times p(B)$, soit $p_A(B) = p(B)$.

E. Loi binomiale : La répétition d'une épreuve de Bernoulli de manière indépendante conduit au schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de succès du schéma de Bernoulli suit une loi binomiale.
Si on répète n fois l'épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est égale à p, alors pour tout entier k compris entre 0 et n, $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.