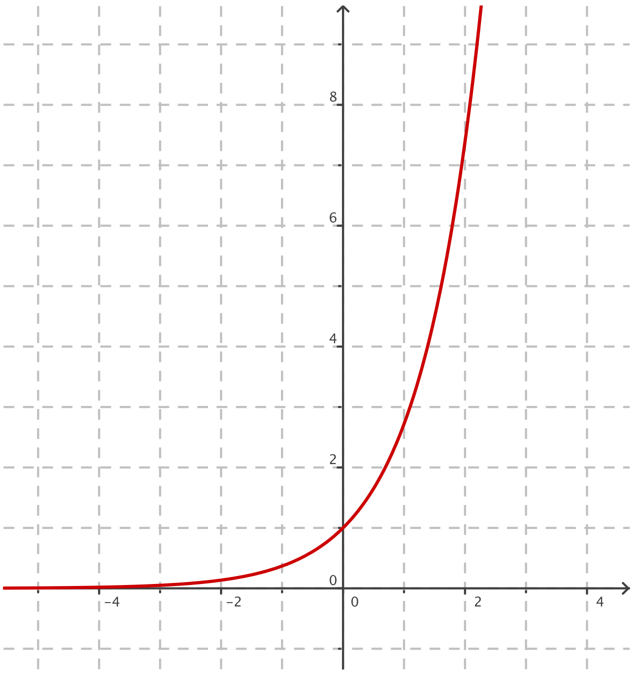
LA FONCTION EXPONENTIELLE TERMINALE L

A. Définition:

On sait que pour $x > 0$, la solution de l'équation $\ln x = y$ est e^y où $\ln e = 1$. Ce nombre e vaut environ 2,71828.
On définit alors une fonction, la fonction exponentielle, pour tout réel x, par e^x , noté aussi $\exp(x)$.
Pour tout réel x, $\exp(x)$ est strictement positif.
La dérivée de $\exp(x)$ est $\exp(x)$. Sa dérivée est donc strictement positive, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $e^0 = 1$.
Limites aux bornes: $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

Représentation graphique de la fonction exponentielle:



Les représentations graphiques des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

B. Propriétés algébriques: Pour tous réels a et b

$\exp(a)\times\exp(b) = \exp(a + b)$, soit $e^a \times e^b = e^{a+b}$.

$\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$ soit $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

En particulier, $\dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$.

$\exp(ab) = (\exp(a))^b$ soit $e^{(ab)} = (e^a)^b$.

Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

C. Equations et inéquations:

1. Equations: Pour tous réels a et b , $\exp(a) = \exp(b)$ est équivalent à $a = b$, soit $e^a = e^b$ est équivalent à $a = b$.

Exemples : a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x+1} = 1$; on sait que $1 = e^0$, donc $e^{2x+1} = e^0$, donc $2x + 1 = 0$, soit $x = -½$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2+1} = e^{2x+3}$; on a donc $x^2 + 1 = 2x + 3$, soit $x^2 - 2x - 2 = 0$. Et on résout l'équation du second degré: $(x - 1)^2 - 3 = 0$, $(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3}) = 0$. Les solutions sont $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2\ln(x+1)} = 3x + 2$; on sait que $2\ln(x + 1) = \ln(x + 1)^2$, d'où l'équation est équivalente à $(x + 1)^2 = 3x + 2$, soit $x^2 + 2x + 1 = 3x + 2$, soit $x^2 - x - 1 = 0$. Les solutions sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. Inéquations: Pour tous réels a et b , $\exp(a) < \exp(b)$ est équivalent à $a < b$, soit $e^a < e^b$ est équivalent à $a < b$.

Exemples : a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x+1} < 1$; équivaut à $e^{2x+1} < e^0$, équivaut à $2x + 1 < 0$, soit $x < -½$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2+1} \geqslant e^{2x+3}$; on a donc $x^2 + 1 \geqslant 2x + 3$, soit $x^2 - 2x - 2 \geqslant 0$. Et on résout l'inéquation du second degré: $(x - 1)^2 - 3 \geqslant 0$, $(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3}) \geqslant 0$.
La solution est $]-\infty;1 - \sqrt{3}]\cup[1+\sqrt{3} ; +\infty[$.