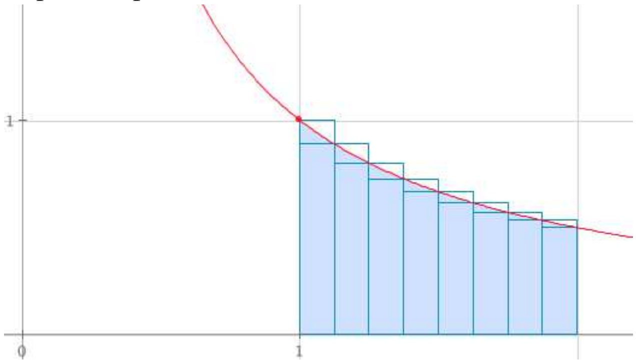
LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN   TERMINALE L

A. Aire sous l'hyperbole , vers la fonction ln

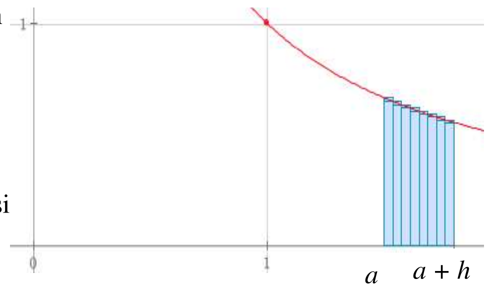
1. Soit a un réel supérieur à 1 . On s'intéresse à l 'aire de la courbe comprise entre l'hyperbole d'équation $y = 1/x$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$, a pouvant prendre différentes valeurs . On note A(a) cette aire.

Avec des rectangles de base très fine on peut obtenir une approximation de cette aire. De plus, par symétrie autour de la droite d'équation $y = x$, on remarque que A($1/a$) = A(a).



2. Soit a, b deux nombres réels avec : $1 < a < b$. Alors l'aire comprise entre b et ab est A (ab) – A(b) et cette aire est égale à A(a) (En utilisant les approximations par les rectangles).

3. On définit alors la fonction ln par : pour tout réel a strictement positif :
Si $a > 1$, $\ln a = A(a)$. Si $a < 1$, $\ln a = -A(a)$.
Par la question 2, on en déduit la propriété fondamentale de la fonction ln : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.



4. Regardons un aspect fonctionnel de cette aire :
On peut dire que si h est très petit, $A(a+h) - A(a) = h \times f(a)$ (aire hachurée à droite considérée comme celle d'un rectangle de hauteur $f(a)$ si h très petit), soit $A(a+h) - A(a) = h \times \frac{1}{a}$, soit $\frac{A(a+h)-A(a)}{h} = \frac{1}{a}$

Ce qui signifie que la dérivé de la fonction aire en a est $\frac{1}{a}$. De plus cette fonction aire est nulle en $a = 1$.

B. La fonction logarithme népérien

1. Définition :

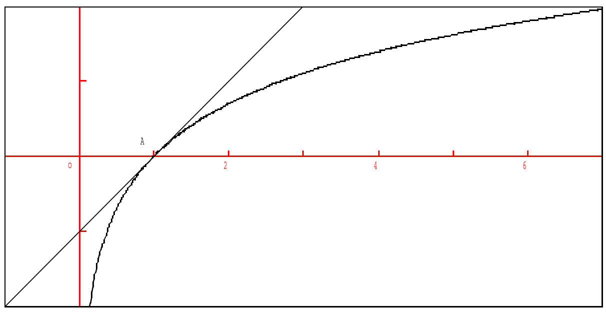
La fonction logarithme népérien est défini pour tout $x > 0$, et est noté ln; l'image de x est ln$x$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

De plus, $\ln 1 = 0$

Conséquences :

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln x$ défini si $x > 0$, donc la dérivée de ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante. On obtient donc le tableau de variation suivant :



La tangente en 1 a pour coefficient directeur 1 !

2. Propriétés algébriques :

Pour tous nombres réels x et y strictement positifs :

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;

b) $\ln(x \times x) = \ln x + \ln x$, soit $\ln(x^2) = 2 \ln x$;

c) Pour tout entier naturel n, $\ln(x^n) = \ln(x^{n-1}) + \ln(x) = \ln(x^{n-2}) + \ln(x) + \ln x = \ldots = n \ln(x)$;

d) $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln 1$, donc $\ln(x \times \frac{1}{x}) = 0$, d'où $\ln x + \ln(\frac{1}{x}) = 0$, soit $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$;

e) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x \times \frac{1}{y}) = \ln(x) + \ln(\frac{1}{y}) = \ln x - \ln y$;

f) Pour tout entier naturel n, $\ln(\frac{1}{x^n}) = \ln(x^{-n}) = -n \ln x$.

Bilan : pour tous nombres réels a et b strictement positifs on a :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$;

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$;

$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$;

$\ln a^n = n \ln a$ pour tout entier relatif n ;

$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$ pour tout entier naturel n.

3. Limite et logarithme népérien

Résoudre les équations : $n \ln 2 > 100$, $n \ln 2 > 1\,000$, $\ln 2^n > 10^{9}$.
Peut on avoir $\ln x$ plus grand qu'un milliard ?
Peut–on avoir $\ln(x)$ inférieur à un milliardième ?

On en conclut que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

4. Logarithme népérien et (in)équations

La fonction ln est strictement croissante et varie de $-\infty$ à $+\infty$. On est donc sûr par exemple que l'équation $\ln(x) = 10$ admette une solution (voir graphique) on a donc la propriété suivante :

Pour tout réel m, il existe un et un seul nombre x tel que $\ln x = m$.
En particulier la solution de l'équation $\ln x = 1$ est le nombre e . On a $e \approx 2,718$.

Le fait que la fonction ln soit strictement croissante sur $]0; +\infty[$ implique :
Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$, et $\ln a \leq \ln b$ équivaut à $a \leq b$.