LES SUITES NUMERIQUES

1. Notation - Définition

Définition : une suite numérique (u_n) est une application de ℕ dans ℝ.
On note (u_n) la suite de nombres $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Le nombre u_n est le terme d'indice n (ou de rang n). u_o est le premier terme de la suite.
Exemples : $u_n = 3^n$ (formule explicite en fonction de n) ; $u_n = 2n - 1$; $u_n = (1 + 5/100)^n$;
$u_n = \frac{3}{n}$ définie pour $n > 0$; $u_{n+1} = 3u_n + 2$ (formule récurrente : un terme de la suite s'écrit en fonction du précédent, voir des précédents) ...

2. Les suites arithmétiques

La suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)\,r$.
Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique : **S = *n* x (demie somme des termes extrêmes)**.

La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique = $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$;

Exemple : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Les suites géométriques

La suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique : **S = premier terme x** $\frac{1-q^n}{1-q}$ **si $q \neq 1$,**

et S = *n* x premier terme si $q = 1$.
La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale à
$u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exemple : $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2\,\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2(2^{n+1} - 1)$.

4. Suites définies par récurrence

Une suite (u_n) est définie par récurrence si on connaît un terme de la suite, et si un terme quelconque de la suite est connu en fonction du ou des précédents.

Exemples: $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$; $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ et $v_1 = v_0 = 1$; $w_{n+1} = 1 - \frac{5}{w_n}$ et $w_0 = 1$.
Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

5. Limite d'une suite

Définition : Une suite (u_n) est une suite **convergente** si la limite de la suite est un nombre réel fini, c'est-à-dire si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ réel fini . Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente (sa limite est infinie ou n'existe pas).

Technique : si $u_n = f(n)$, alors la limite de la fonction f en $+\infty$ est la limite de la suite u_n .

Théorème (de comparaison) : Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = l$ (théorème des gendarmes) .
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si les deux suites convergent, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n$.

Exemples : $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. $u_n = \frac{3}{n}$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.