EXERCICES TYPE BAC **TERMINALE L**

EXERCICE 1: Rappels : e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$. La fonction f, définie sur un intervalle I par $f(x) = \ln(ax + b)$ est dérivable sur I et sa dérivée f' est définie par $f'(x)=\frac{a}{ax+b}$.

Partie A : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = 5x + 2 - 5(e - 1)\ln(1 + x)$. On appelle C la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra comme unité 6 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $f(0)$ et $f(e - 1)$. En déduire les coordonnées de deux points appartenant à la courbe C.
2. Calculer $f(e - 2)$ en fonction de e et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. Montrer que $f'(x)=5\times\frac{x-e+2}{1+x}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
6. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1	7/6	8/6	9/6	10/6	11/6	2
Valeurs approchées de $f(x)$ à 0, 1 près													

Construire la droite T et la courbe C.

Partie B : On suppose que le taux d'une substance S (en g/l) dans le sang d'un enfant de la naissance à 2 ans est donné par $f(x)$ où x est l'âge de l'enfant en année.

1. Quel est le taux de la substance S à la naissance ?

2. À quel âge, arrondi au mois le plus proche, le nourrisson retrouve-t-il un taux de la substance S identique à celui de la naissance ? (Utiliser la partie A ; vous avez le choix de la méthode : graphique ou autre). Expliquer votre démarche.

3. À quel âge, arrondi au mois le plus proche, le nourrisson a-t-il dans le sang un taux de substance S minimal ? Expliquer votre démarche.

EXERCICE 2 : (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 7$, de raison r et telle que $u_6 = 10{,}75$.
Calculer la raison de la suite et calculer u_{25}.

EXERCICE 3 : Un club de sport propose deux types d'abonnements non permutables.
Formule A : une cotisation annuelle de 100 € à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 2 000 € .
Formule B : une cotisation annuelle initiale de 200 € qui augmente de 10 % par an.
Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 10 € sur la cotisation annuelle.

1. Calculer la somme versée au club avec la formule A en 10 années et en n années.

2. On appelle b_n le montant de la cotisation de la n–ième année avec la formule B, ainsi $b_1 = 200$.

a. Calculer b_2 , b_3 .

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on a : $b_{n+1} = 1{,}1\, b_n - 10$

3. Soit la suite (d_n) définie pour tout entier supérieur ou égal à 1 par $d_n = b_n - 100$.

a. Calculer d_1 , d_2 , d_3 .

b. Montrer que (d_n) est une suite géométrique .

c. Exprimer d_n en fonction de n . En déduire b_n en fonction de n .

d. Calculer le montant de la cotisation la dixième année ainsi que la somme versée au club durant ces 10 années.

EXERCICE 4 : Un éditeur établit ses prix pour l'année chaque premier janvier.

Dans cet exercice, nous nous intéresserons au prix de deux collections publiées par l'éditeur: la collection A et la collection B. Dans chaque collection, tous les volumes sont vendus au même prix unitaire.

Première partie : étude de la collection A.

Le prix unitaire des livres de cette collection est de 30 € le premier janvier 2005 et augmente de 3 % au premier janvier de chaque année. On désigne par a_0 le prix unitaire en euros d'un livre le premier janvier 2005 et par a_n le prix unitaire en euros d'un livre le premier janvier de l'année (2005 + n). On a donc, $a_0 = 30$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. Que peut-on en déduire pour la suite (a_n) ?

2. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout n entier naturel.

3. Quel sera le prix unitaire d'un livre de la collection A, le premier janvier 2017 ?

4. En utilisant les logarithmes népériens, déterminer à quelle date, le prix unitaire serait pour la première fois supérieur à 40 €.

Deuxième partie : étude de la collection B.

Le prix unitaire des livres de cette collection est de 30 € le premier janvier 2005. Il augmente d'une part de 1 % et d'autre part de 0,50 € au premier janvier de chaque année. On désigne par b_0 le prix unitaire en euros d'un livre le premier janvier 2005 et par b_n le prix unitaire en euros d'un livre le premier janvier de l'année (2005 + n).

On a donc, $b_0 = 30$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $b_{n+1} = 1{,}01 \quad b_n + 0{,}50$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = b_n + 50$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,01.

b) Calculer u_0 et donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $b_n = 80 \quad 1{,}01^n - 50$.

4. Quel sera le prix unitaire d'un livre de la collection B, le premier janvier 2017 ?

EXERCICE 5 : 1. Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 6$ et par la relation de récurrence: $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 3$. (n est un entier naturel). On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 4$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Montrer que $v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n , en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

2. On pose $a_n = \ln v_n$.

a) Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2\ln 2$.

b) Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

c) Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13\ln 2$.

EXERCICE 6 : Le prix d'un forage est estimé par une entreprise de la façon suivante :

le creusement du premier mètre est facturé 100 € ;

à partir du deuxième mètre, le creusement est facturé 10 € de plus que celui du mètre précédent.

On appelle p_n le prix facturé pour le creusement du n-ième mètre.

1) Déterminer p_1, p_2 et p_3.
2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
3) Donner le terme général p_n en fonction de n. Quel est le prix facturé pour le $10^{\text{ème}}$ mètre ?
4) Calculer le prix de revient d'un forage de 10 mètres.

EXERCICE 7 : Pierre opère un placement dans sa banque en versant sur un compte 200 euros, chaque premier janvier à partir du 0 1 / 0 1 / 2005. La banque rémunère ce compte au taux annuel de 4 % .

On note u_0 le montant initial du compte, donc $u_0 = 200$ et u_n, le montant au 1er janvier de l'année (2005 + n), n étant un entier naturel.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 On arrondira au centime d'euro.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

3. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n + 5000$

a) Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).

b) Prouver que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

c) Exprimer alors v_n en fonction de n puis en déduire que $u_n = 5200 \quad (1{,}04)^n - 5000$.

4. Combien d'années Pierre devra-t-il attendre, pour disposer d'au moins 3 000 euros sur ce compte ?

Pour cette question, on pourra faire appel à la fonction logarithme népérien notée ln.

5 . Au bout de combien de temps le montant annuel des intérêts dépassera-t-il la somme déposée annuellement sur le compte (200 euros) ?

EXERCICE 8 : Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 3] par $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\ln x}{x}$.

On rappelle que e est le nombre tel que $\ln e = 1$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

La courbe (C) est donnée en annexe et à rendre avec la copie.

Cette courbe permettra de contrôler l'exactitude de certains résultats, mais ne doit pas être utilisée pour justifier les réponses.

Partie I

On considère la fonction u définie sur l'intervalle [1 ; 3] par $u(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$.

- On note u' la dérivée de la fonction u. Calculer $u'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle [1 ; 3]
- On admet l'existence d'un nombre unique a, appartenant à l'intervalle [1 ; 3] tel que $u(a) = 0$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant le signe de $u(x)$.

x	1	a	3
Signe de $u(x)$		0	

Partie II

a. On note f' la dérivée de la fonction f.

On admet que pour tout x de l'intervalle [1 ; 3], $f'(x) = \dfrac{u(x)}{2x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie I.

Déterminer selon les valeurs de x le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 3].

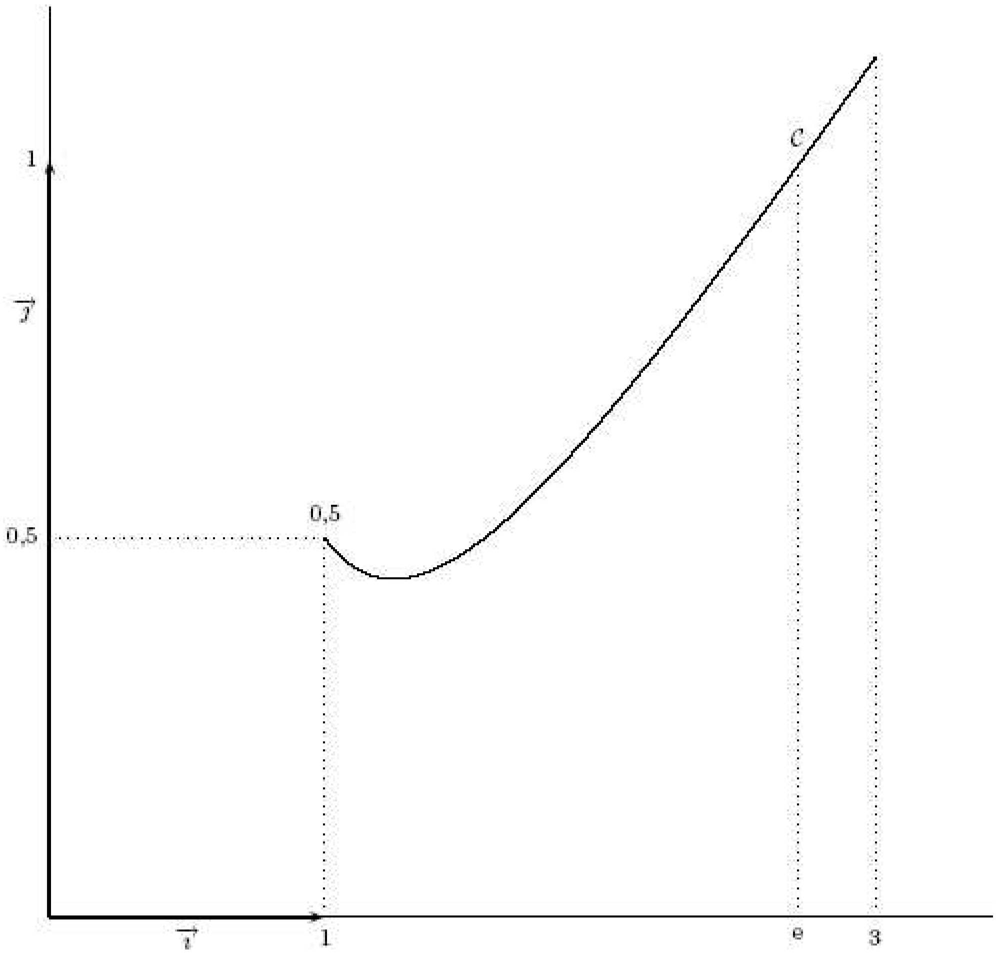
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f (on ne calculera pas $f(a)$).

– On note A le point de coordonnées (1 ; $\dfrac{1}{2}$).

Montrer que la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse e est parallèle à la droite (OA).

– Tracer la droite (OA) et la tangente (T) sur l'annexe à rendre avec la copie.

Placer le point B de coordonnées (a ; $f(a)$) et la tangente à la courbe (C) au point B.



EXERCICE 9 : La courbe C est le graphe d'une fonction f définie sur [–1 ; 3]. On a tracé les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 , 1 et 2.

a. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

b. Déterminer graphiquement $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

c. Déterminer une équation de la tangente à C en B.

d. On précise que la fonction représentée est définie par $f(x) = x^2 + bx + c$ où b et c sont deux réels.

En utilisant les résultats précédents, déterminer b et c.

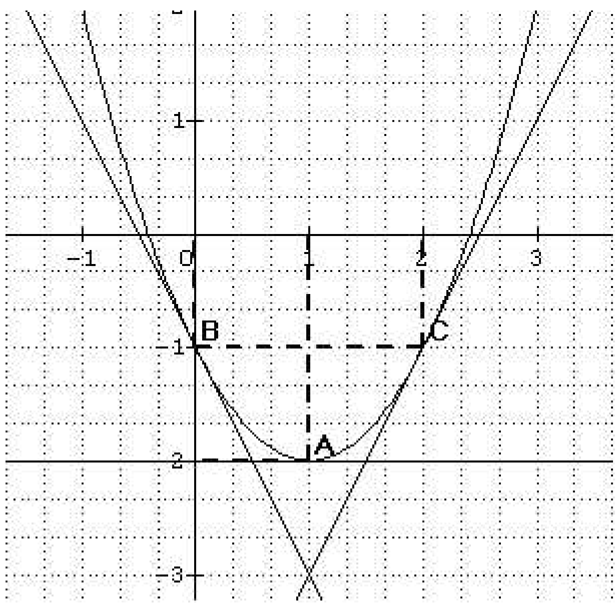
Vérifier alors que $f(1 + \sqrt{2}) = 0$.

On admet que l'on a : $f(1 - \sqrt{2}) = 0$.

A l'aide de ces résultats et du graphique, dresser le tableau de signe de f sur [–1 ; 3].

e. La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle [–1 ; 3].

Donner le tableau de variation de F sur l'intervalle [–1 ; 3].



EXERCICE 10 : Des chardons envahissent une pelouse de deux façons différentes. Ce dimanche 13 juin, ils couvrent 300 m^2 de la pelouse. Chaque semaine l'aire de la surface envahie par les chardons augmente d'une part de 4 % par la prolifération des racines, d'autre part de 13 m^2 dus aux graines envolées des jardins voisins. On appelle u_n l'aire de pelouse, en m^2, envahie par les chardons au bout de n semaines.

On a donc $u_0 = 300$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n + 13$.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n + 325$.

a. Démontrer que $v_{n+1} = 1{,}04\, v_n$.

b. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire que $u_n = 625 \times (1{,}04)^n - 325$.

5. Au bout de combien de semaines les chardons auront-ils envahi plus de 700 m^2 de la pelouse ?

EXERCICE 11 : Dans un rayon d'un magasin ouvert dix heures par jour, on peut trouver soit le vendeur A pendant six heures de temps, soit en son absence le vendeur B pendant trois heures de temps, soit en l'absence des vendeurs A et B aucun vendeur pendant une heure de temps. Les plages horaires de présence des vendeurs A et B varient, si bien que le fait qu'un client soit conseillé par le vendeur A, par le vendeur B ou ne soit pas conseillé est aléatoire.

- Quand ils sont conseillés par le vendeur A, 70 % des clients effectuent un achat.
- Quand ils sont conseillés par le vendeur B, 50 % des clients effectuent un achat
- Quand ils ne sont conseillés par aucun vendeur, 20 % seulement des clients effectuent un achat.

Pour un client qui se présente dans ce rayon, on considère les événements suivants :

A : « Le client est conseillé par A ». B : « Le client est conseillé par B ». C : « Le client n'est conseillé par personne ». H : « Le client effectue un achat ».

Traduire en terme de probabilités conditionnelles, les données numériques de l'énoncé. Construire un arbre de probabilités.

Un client se présente dans le rayon.

a Quelle est la probabilité qu'il soit conseillé par A et qu'il effectue un achat ?

b Quelle est la probabilité qu'il effectue un achat ?

c Le client effectue un achat. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas été conseillé par le vendeur A.

2. Pendant 7 jours, un client par jour et un seul vient dans le rayon.

a Quelle est la probabilité que, sur les sept clients, cinq aient été conseillés par le vendeur A ?

b Quelle est la probabilité que, sur les sept clients, au moins un client ait été conseillé par le vendeur A ?