

EXERCICE 1:

a) Le rayon des boules est divisé par deux, donc $r_2 = 1/2$. La suite (r_n) est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $r_1 = 1$, donc $r_{10} = r_1 \times (1/2)^{10} = 1/1024 \approx 0,001$ m, soit 1 mm.

b) La hauteur de la pile formée des 10 premières boules $= \sum_{k=1}^{k=10} r_k = r_1 \times \frac{1-(1/2)^{10}}{1-1/2} = 2(1 - \frac{1}{1024}) \approx 1,998$ m.

c) Le volume V_1 de la boule $B_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi$; le volume V_2 est égale à $\frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi(1/2)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{8}$

et $V_3 = \frac{4}{3}\pi r_3^3 = \frac{4}{3}\pi(1/4)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{64}$. On remarque que $V_2 = \frac{1}{8} V_1$ et $V_3 = \frac{1}{8} V_2$. Si le rayon est divisé par

2, le cube du rayon est divisé par 8; en fait $V_{n+1} = \frac{1}{8} V_n$.

d) Donc la suite (V_n) est géométrique de raison $1/8$ et de premier terme $V_1 = \frac{4}{3}\pi$.

e) Le volume total des 10 premières boules $= \sum_{k=1}^{k=10} V_k = V_1 \times \frac{1-(1/8)^{10}}{1-1/8} = \frac{4}{3}\pi \frac{8}{7} (1 - \frac{1}{8^{10}}) \approx 4,787$ m³.

EXERCICE 2:

1. On a $u_1 = u_0 + 0,04 u_0 + 200 = 1,04u_0 + 200 = 408$ euros ; $u_2 = 1,04u_1 + 200 = 624,32$ euros ;
et $u_3 = 1,04u_2 + 200 = 849,29$ euros.

2. Soit $u_{n+1} = 1,04u_n + 200$.

3. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n + 5000$.

a) Calcul des trois premiers termes de la suite (v_n) : $v_1 = u_1 + 5000 = 5408$;
 $v_2 = u_2 + 5000 = 5624,32$ et
 $v_3 = u_3 + 5000 = 5849,29$.

b) On peut écrire $v_{n+1} = u_{n+1} + 5000 = 1,04u_n + 5200 = 1,04(u_n + 5000) = 1,04v_n$; donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,04 et de premier terme $v_0 = 5200$.

c) On a donc $v_n = v_0 \times (1,04)^n = 5200 \times (1,04)^n$.

Ainsi $u_n = v_n - 5000 = 5200 \times (1,04)^n - 5000$.

4. Pour trouver le nombre d'années que Pierre devra attendre pour disposer d'au moins 3 000 euros, on calcule certains termes de la suite (u_n) :
D'après le tableau ci-contre, il disposera de 3000 euros au bout de 11 ans.

5. D'après le tableau ci-contre, les intérêts dépasseront 200 euros au bout de 18 ans.

n	u(n)	Intérêts
0	200	0
1	408	8
2	624,32	16,32
3	849,29	24,97
4	1083,26	33,97
5	1326,6	43,33
6	1579,66	53,06
7	1842,85	63,19
8	2116,56	73,71
9	2401,22	84,66
10	2697,27	96,05
11	3005,16	107,89
12	3325,37	120,21
13	3658,38	133,01
14	4004,72	146,34
15	4364,91	160,19
16	4739,5	174,6
17	5129,08	189,58
18	5534,25	205,16
19	5955,62	221,37
20	6393,84	238,22
21	6849,59	255,75
22	7323,58	273,98
23	7816,52	292,94
24	8329,18	312,66