CORRECTION DEVOIR MAISON N° 2 TERMINALE L

EXERCICE 1:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$.

a) La fonction f est définie pour les réels x tels que $x - 1$ est non nul, c'est-à-dire pour $x \neq 1$. Donc l'ensemble de définition D_f est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) On a $x + 2 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(x+2)(x-1)+1}{x-1} = \dfrac{x^2-x+2x-2+1}{x-1} = \dfrac{x^2+x-1}{x-1} = f(x)$ sur D_f .

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$.

d) Dérivée de cette fonction sur D_f : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Le signe de la dérivée est donné par $x(x-2)$ puisque le dénominateur est un carré.
On réalise un tableau de signes:

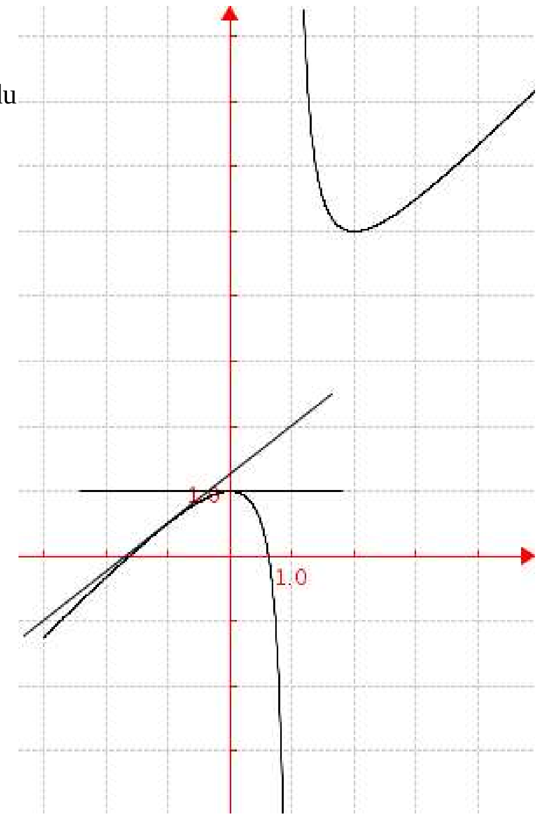
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

e) D'où les variations de cette fonction sur D_f : la fonction est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[2; +\infty[$. Elle est décroissante sur $[0; 1[$ et sur $]1; 2]$.
Son tableau de variations:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

f) Les équations des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0 et -1:
T_0 : $y = f'(0)(x) + f(0) = 1$; il s'agit d'une tangente horizontale.
T_{-1} : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = \dfrac{3}{4}(x+1) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$;

g) La courbe représentative de f et les tangentes dans un repère du plan:



h) L'équation $f(x) = 0$ correspond à $x^2 + x - 1 = 0$;
on recherche la forme canonique: $x^2 + x - 1 = (x + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4} - 1$
$= (x + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{5}{4} = (x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2})(x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2})$.

D'où les solutions : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.