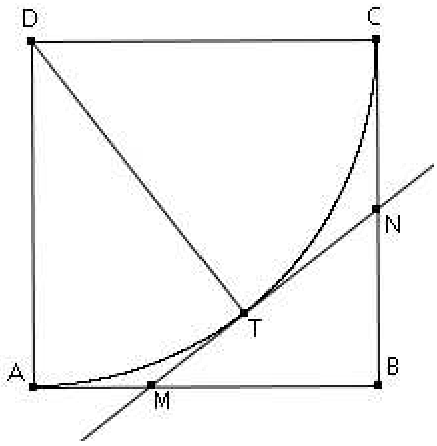
CORRECTION DEVOIR MAISON N° 3 TERMINALE L



EXERCICE : On considère le carré ABCD tel que AB = 1 et le cercle de centre D et de rayon 1.
On considère un point T sur l'arc de cercle AC (distinct de A et de C) intérieur au carré .
La tangente au cercle en T coupe [AB] en M et [BC] en N.
On cherche la position de T pour que la distance MN soit minimale .
Pour cela, on pose AM = x et CN = y .
Calculer MN en fonction de x et de y .
Trouver une relation entre x et y , puis trouver la distance MN en fonction de x .

CORRIGE :
La tangente (MN) au cercle en T est perpendiculaire au rayon [DT] du cercle.
Comme M [AB], AM est compris entre 0 et 1.
On applique le théorème de Pythagore dans le triangle BMN rectangle en B:
$MN^2 = BM^2 + BN^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2$.
Montrons que MA = MT et que NT = NC :
Les triangles AMD et TMD sont rectangles respectivement en A et T avec le côté [DM] en commun;
de plus DT = DA = rayon du cercle ; donc les triangles sont isométriques et MA = MT = x.
On montre de même que NT = NC = y.
Ainsi MN = MT + NT = $x + y$.
Donc $MN^2 = (x + y)^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2$. En dévellopant et en simplifiant, on obtient $2xy = 2 - 2x - 2y$,
soit $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. Donc MN = $x + \dfrac{1-x}{1+x}$. On pose $f(x) = x + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{x^2+1}{1+x}$.
On cherche le minimum de cette fonction sur l'intervalle [0; 1]. Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{1+x}$.
Le signe de cette dérivée dépend du numérateur puisque le dénominateur est un carré.
On a $x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2 = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$.
Ce produit est positif pour les valeurs extérieures à $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$, et du signe contraire entre ces valeurs. D'où le tableau de variations:

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$2(\sqrt{2}-1)$	$\nearrow$	1

Calcul de $f(-1+\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} + \dfrac{1-(-1+\sqrt{2})}{1-1+\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2} + \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1 = 2(\sqrt{2}-1)$.
Donc la distance MN est minimale lorsque AM = $-1+\sqrt{2}$, et cette distance égale $2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}83$.
De plus CN = $\dfrac{1-(-1+\sqrt{2})}{1-1+\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ = AM.