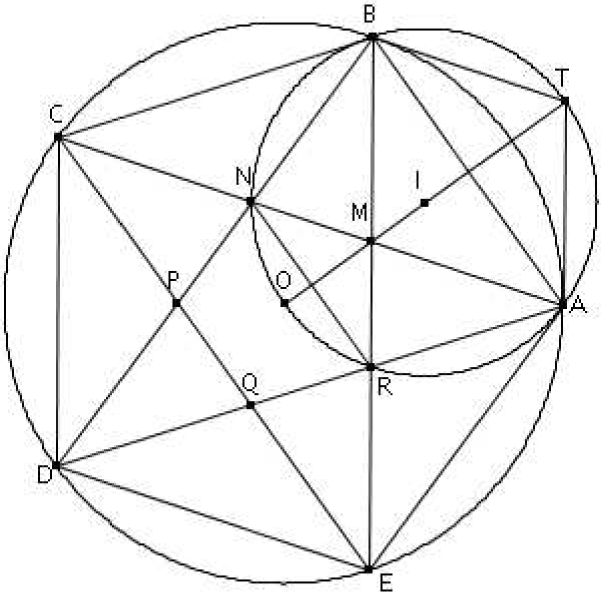
CORRECTION DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE L

1. On construit le pentagone régulier ABCDE inscrit dans le cercle Γ de centre O et de rayon 6 cm en utilisant la construction de Richmond : On considère un cercle de centre O, de rayon OA = 6; la perpendiculaire à (OA) en O coupe le cercle en F; le point I est le milieu de [OF]. La bissectrice de l'angle $\widehat{OIA}$ coupe [OA] en G. La perpendiculaire à (OA) en G coupe le cercle en B et E . Le côté du pentagone régulier est AB. Il ne reste plus qu'à reporter cette distance.



2. On sait que la diagonale de ABCDE est égale à AB $\times\phi$ et que CM = AN = EM = AB. Donc AM = CN = AB $\times\phi$ – AB = AB(ϕ – 1) et MN = AC – 2AM = AB $\times\phi$ – 2AB(ϕ – 1) = AB(2 – ϕ). Pour des raisons de symétrie, on a aussi NP = PQ = QR = MR = AB(2 – ϕ). De plus, ABCQ est un losange tel que $\widehat{ABC}$ = $\widehat{ABC}$ = 108°, donc $\widehat{BAQ}$ = $\widehat{BCQ}$ = (360 – 2$\times$108)/2 = 72°. Et $\widehat{CQA}$ = $\widehat{PQR}$ = 180 – 72 = 108°. On montre de même que les angles $\widehat{QRM}$, $\widehat{RMN}$, $\widehat{MNP}$ et $\widehat{NPQ}$ sont auusi égaux à 108°. Ainsi MNPQR a cinq côtés de même longueur et les angles entre les côtés adjacents égaux à 108°, donc MNPQR est un pentagone régulier.
Sa diagonale NR = $\phi\times$ côté = $\phi\times$ AB(2 – ϕ) = AB(2ϕ – ϕ^2) = AB(ϕ – 1) = AM.
3. Le triangle ABN est isocèle en A car AB = AN (vu à la question précédente).

4. Les tangentes en A et B au cercle Γ se coupent en T. On sait que TA = TB et la droite (BT) est perpendiculaire à (OB), (AT) est perpendiculaire à (OA). La droite (OT) est la médiatrice du segment [AB] et donc bissectrice de $\widehat{AOB}$ puisque le triangle AOB est isocèle en O. Comme $\widehat{AOB}$ = 72°, alors $\widehat{AOT}$ = 72/2 = 36° et dans le triangle AOT rectangle en A, $\widehat{OTA}$ = 90 – 36 = 54°; de même, $\widehat{OTB}$ = 54°, d'où $\widehat{ATB}$ = 54 + 54 = 108°.
Dans le triangle DOA isocèle en O, $\widehat{DOA}$ = 2 $\times$72 = 144°, d'où $\widehat{OAD}$ = (180 – 144)/2 = 18° et $\widehat{TAR}$ = 90 + 18 = 108°. Par symétrie, on a aussi $\widehat{TBN}$ = 108°. En utilisant la réciproque du théorème de Thalès, $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MR}$, donc les droites (AB) et (MN) sont parallèles, et $\widehat{ARN}$ = 180 – $\widehat{RAB}$ = 108°.
De même, $\widehat{BNR}$ = 108°. De plus, AR = NB = AB(ϕ – 1) = NR. La droite (OA) est la médiatrice de [BE], donc (OA) et (BR) sont perpendiculaires, et comme (OA) et (AT) sont perpendiculaires, alors ((BR) // (AT). La droite (OB) est la médiatrice de [CA], donc (OB) et (AN) sont perpendiculaires, et comme (OB) et (BT) sont perpendiculaires, alors ((AN) // (BT). Ainsi, AMBT est un parallélogramme, d'où BT = AM et AT = BN. Ainsi les angles entre les côtés adjacents du pentagone ATBNR sont égaux à 108°, et les côtés sont tous de même longueur, donc ce pentagone ATBNR est régulier.

5. Les triangles AOT et BOT sont rectangles respectivement en A et B, donc le cercle circonscrit à AOT et à BOT a pour centre I, le milieu de [OT]. Ce cercle est donc le cercle circonscrit au triangle ATB. Ce cercle passe par trois sommets du pentagone régulier, c'est donc le cercle circonscrit au pentagone ATBNR.
6. Les tangentes en A et B au cercle Γ ' sont les droites (AE) et (BC): en effet, le triangle OIA est isocèle en I, et comme $\widehat{IOA}$ = 36°, $\widehat{IAO}$ = 36°. De plus, $\widehat{OAE}$ = 54°, donc $\widehat{IAE}$ = $\widehat{IOA}$ + $\widehat{OAE}$ = 54 + 36 = 90°. Donc les droites (IA) et (AE) sont perpendiculaires, donc (AE) est tangente en A au cercle de centre I. On démontre de même que (IB) et (BC) sont perpendiculaires, donc (BC) est tangente en B au cercle de centre I.