CORRECTION DEVOIR MAISON N° 5 TERMINALE L

EXERCICE 1 :

1. L'ensemble de définition de la fonction g est $]0; +\infty[$.

La dérivée de g est $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ qui est du signe de $1 - x$ puisque $x > 0$.

Donc $g'(x)$ est positive sur $]0; 1]$ et négative sur $[1; +\infty[$. Donc la fonction g est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$. Donc la fonction g est négative sur $]0; +\infty[$.

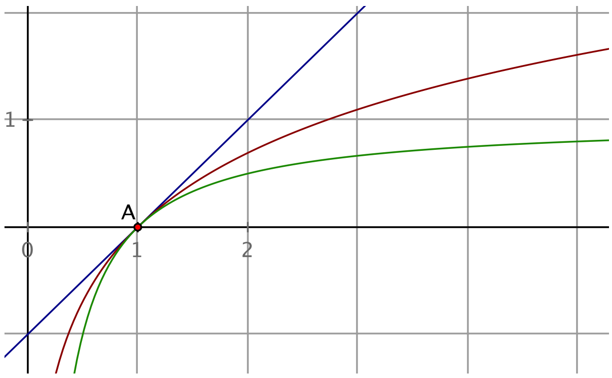
2. L'ensemble de définition de la fonction h est $]0; +\infty[$.

La dérivée de h est $h'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$ qui est du signe de $1 - x$ puisque $x^2 > 0$.

Donc $h'(x)$ est positive sur $]0; 1]$ et négative sur $[1; +\infty[$. Donc la fonction h est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $h(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$. Donc la fonction h est négative sur $]0; +\infty[$.

3. D'après la question 1, pour tout $x > 0$, $g(x) \leqslant 0$, donc $\ln x - x + 1 \leqslant 0$, donc $\ln x \leqslant x - 1$. D'après la question 2, pour tout $x > 0$, $h(x) \leqslant 0$, donc $1 - \frac{1}{x} - \ln x \leqslant 0$, donc $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x$. Ainsi, $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.

Donc, la courbe L représentative de la fonction logarithme népérien est toujours située entre la droite (d) d'équation $y = x - 1$ et la courbe C représentative de la fonction f définie par $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Les trois courbes sont concourantes en A(1; 0).



EXERCICE 2 :

1. La fonction dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$. Le dénominateur est strictement positif. La dérivée est donc du signe de $\sqrt{x} - 2$, qui s'annule pour $x = 4$, et est négatif sur $]0; 4]$ et positif sur $[4; +\infty[$.

2. Donc la fonction f est décroissante sur $]0; 4]$ et croissante sur $[4; +\infty[$. Elle admet un minimum pour $x = 4$ qui vaut $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - 2\ln 2 \simeq 0{,}62$. Donc la fonction f est strictement positive sur $]0; +\infty[$.

Donc pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} - \ln x > 0$, soit $\sqrt{x} > \ln x$.

3. Ainsi, la courbe C' représentative de la fonction racine carrée est toujours au-dessus de la courbe C représentative de la fonction logarithme népérien. Il n'y a pas de points d'intersection.