CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 4 TERMINALE L

EXERCICE 1:

Partie I : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. La dérivée de f est $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$, qui s'annule en 2, est positive sur $[2; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; 2]$. Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

2. Comme le minimum de f est $f(2) = -1$, f s'annule en deux valeurs : $x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1 = (x - 3)(x - 1) = 0$ pour $= 1$ et $x = 3$. La fonction f est positive sur $]-\infty ; 1]$ et $[3; +\infty[$ et négative sur $[1; 3]$.

Partie II : On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 4\ln x - \frac{3}{x}$.

1. La dérivée de la fonction g est $g'(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$.

2. Le dénominateur est un carré, toujours positif, donc le signe de g' est celui de la fonction f.

3. Donc la fonction g est croissante sur $]0; 1]$, puis décroissante sur $[1; 3]$, puis croissante sur $[3; +\infty[$.

4. A l'aide de la calculatrice, on obtient $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

5. L'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2 :

$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = -1(x - 2) + 2 - 4\ln 2 - \frac{3}{2} = -x + 4 - 4\ln 2 - \frac{3}{2} = -x - 4\ln 2 + \frac{5}{2}$.

EXERCICE 2 :

1. $A = 5\ln 2 - \ln\frac{3}{4} + \ln 6 = 5\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 + \ln 2 + \ln 3 = 8\ln 2$;

$B = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{5+3}{5-3} - \ln 2^3 = -\ln 2 + \ln\frac{8}{2} - 3\ln 2 = -\ln 2 + \ln 4 - 3\ln 2 = -2\ln 2$.

2. a) Il faut que $x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > 1$. $\ln(x - 1) + \ln(x + 3) = \ln 5$ équivaut à $\ln(x - 1)(x + 3) = \ln 5$ équivaut à $(x - 1)(x + 3) = 5$, soit $x^2 - 2x - 3 = 5$, soit $x^2 - 2x - 8 = 0$, soit $(x - 1)^2 - 9 = 0$, soit $(x - 4)(x + 2) = 0$; les solutions de cette équation sont 4 et -2. La seule solution valable est 4, puisque > 1.

b) . Il faut que $x > 0$ et $x - 1 > 0$, soit $x > 1$. $\ln x + \ln(x - 1) = 0$ équivaut à $\ln(x(x - 1)) = \ln 1$, équivaut à $x(x - 1) = 1$, soit $x^2 - x - 1 = 0$, soit $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$, soit $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = 0$, soit $(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) = 0$; les solutions de cette équation sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La seule solution valable est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ puisque > 1.

3. Résoudre les inéquations (préciser d'abord l'ensemble de définition) :

a) $\ln x \leqslant 1$: Il faut que $x > 0$. $\ln x \leqslant 1$ équivaut à $\ln x \leqslant \ln e$, équivaut à $x \leqslant e$;donc la solution de cette inéquation est $]0; e]$.

b) $\ln(x + 2) + \ln(x - 2) \leqslant \ln(x + 8)$. Il faut que $x + 2 > 0$, $x - 2 > 0$ et $x + 8 > 0$, soit $x > 2$.

$\ln(x + 2) + \ln(x - 2) \leqslant \ln(x + 8)$ équivaut à $\ln(x + 2)(x - 2)) \leqslant \ln(x + 8)$ équivaut à $\ln(x^2 - 4) \leqslant \ln(x + 8)$ équivaut à $x^2 - 4 \leqslant x + 8$ équivaut à $x^2 - x - 12 \leqslant 0$. Le discriminant égal $1 + 48 = 49 > 0$; il y a deux solutions à l'équation :

$x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{1-7}{2} = -3$. Le trinôme $x^2 - x - 12$ est négatif pour les valeurs entre les racines, soit sur $[-3; 4]$. La solution de l'inéquation est donc $]2; 4]$.