CORRECTION **DEVOIR SURVEILLE N° 4** **TERMINALE L**

EXERCICE 1

On considère les nombres de la forme $A(n) = 2^n + 3$.

a) $A(0) = 4 = 2^2$; $A(1) = 5$ est premier; $A(2) = 7$ est premier ; $A(3) = 11$ est premier ; $A(4) = 19$ est premier ; $A(5) = 35 = 5 \times 7$; $A(6) = 67$ est premier.

d) $A(13) = 8195 = 745 \times 11$ est donc divisible par $A(3)$.

e) $A(23) = 8388611 = 762601 \times 11$ est donc divisible par $A(3)$.

EXERCICE 2

1. Le reste de la division euclidienne de 5 par 8 est 5 car $5 = 8 \times 0 + 5$.

Le reste de la division euclidienne de 5^2 par 8 est 1 car $5^2 = 8 \times 3 + 1$, soit .

2. Le reste de la division euclidienne de 5^{86} par 8 est 1 car $5^{86} = (5^2)^{43} \equiv 1^{43} \equiv 1\ [8]$.

Le reste de la division euclidienne de 5^{87} par 8 est 5 car $5^{87} = (5^2)^{43} \times 5 \equiv 1^{43} \times 5 \equiv 5\ [8]$.

3. Le reste de la division euclidienne de 965^{87} par 8 est 5 car $965 \equiv 5\ [8]$, d'où $965^{87} \equiv 5^{87} \equiv 1^{43} \times 5 \equiv 5\ [8]$.

4. Pour n un entier naturel, $5^{2n+1} + 5^{2n} + 2 = (5^2)^n \times 5 + (5^2)^n + 2 \equiv 1^n \times 5 + 1^n + 2 \equiv 5 + 1 + 2 = 8 \equiv 0\ [8]$, donc $5^{2n+1} + 5^{2n} + 2$ est un multiple de 8.

EXERCICE 3

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x + 4$.

a) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Le signe de cette dérivée dépend du numérateur $x - 1$ car $x > 0$. Et $x - 1 > 0$ si $x > 1$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $0 < x \leqslant 1$.

b) Le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de la fonction f est 5 atteint pour $x = 1$; ce minimum étant strictement positif, la fonction f est strictement positif sur $]0; +\infty[$.

c) L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $x - \ln x + 4 = x$ et $x > 0$; soit $\ln x = 4$, soit $x = e^4$.

2. Pour résoudre l'équation $\ln(x + 1) = \ln(2x - 1) + \ln 3$, il faut que $x + 1 > 0$ et $2x - 1 > 0$, soit $x > ½$.

Et $\ln(x + 1) = \ln(2x - 1) + \ln 3$ implique $\ln(x + 1) = \ln(3(2x - 1))$ par la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

D'où $x + 1 = 3(2x - 1)$, $x + 1 = 6x - 3$, $5x = 4$, $x = \dfrac{4}{5} > ½$; Donc la solution de l'équation est $\dfrac{4}{5}$.