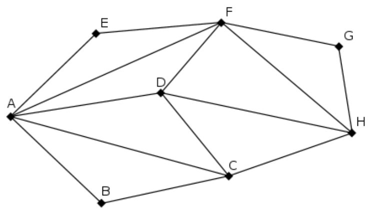
<u>CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 TERMINALE ES spé</u>

EXERCICE 1 : On considère le graphe Γ ci-contre.



1. On cherche les degré des sommets :

sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
degrés	5	2	4	4	2	5	2	4

D'après le théorème d'Euler, ce graphe admet une chaîne eulérienne puisque il est connexe et que deux sommets exactement sont de degré impair. Une telle chaîne : A – E – A – B – C – H – D – C – A – D – F – G – H.

2. Ce graphe n'admet pas de cycle eulérien, puisque ce graphe n'a pas tous ces sommets de degré pair.

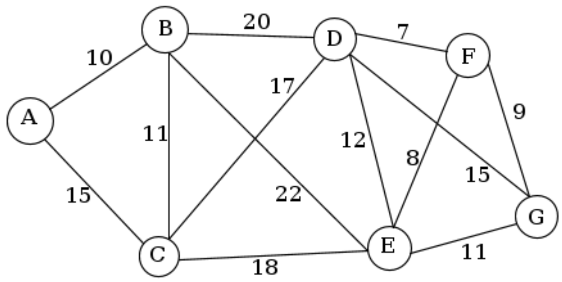
3. On retire l'arête entre les sommets A et F. Dans ce cas, le graphe est toujours connexe et les degrés des sommets sont tous pairs. Donc, le graphe admet un cycle eulérien, et donc admet une chaîne eulérienne.
Un cycle : A – B – C – H – G – F – E – A – D – F – H – D – C – A.

4. la matrice M associée au graphe Γ :
Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique :
A, B, C, D, E, F, G, H.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. le nombre de chaînes de longueur 6 joignant A à F est le terme a_{16} de la matrice $M^6 = 609$. Il y a 609 chaînes de longueur 6 joignant A à F.

EXERCICE 2 : Le graphe ci-contre représente le réseau des égouts d'une ville, les sommets sont les stations de ce réseau et les nombres sur les arêtes sont les durées de trajet en minutes entre stations.



Un ouvrier doit se rendre de la station A à la station G.

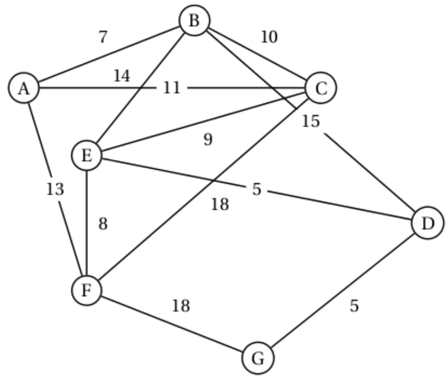
1. On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à G et la durée du trajet :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
		10, A	15, A	∞	∞	∞	∞
		____	21, B	30, B	32, B	∞	∞
			15, A	32, C	33, C	∞	∞
			____	30, B	42, D	∞	∞
				____	32, B	∞	∞
					____	37, D	45, D
						40, E	45, D
						37, D	46, F
						____	43, E

D'après le tableau, le trajet donnant la durée minimale est A – B – E – G et cette durée est de 43 minutes.

2. L'ouvrier apprend que les canalisations C – E et D – E sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut pas les utiliser. Le trajet trouvé précédemment n'emprunte pas les arêtes C – E et D – E, donc la durée du trajet minimal reste inchangée : 43 minutes .

EXERCICE 3 : Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service.
Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. la ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. a) On cherche le degré des sommets :

sommets	A	B	C	D	E	F	G
degrés	3	4	4	3	4	4	2

D'après le théorème d'Euler, ce graphe admet une chaîne eulérienne puisque il est connexe et que deux sommets exactement sont de degré impair. Philippe a donc la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables.

b) À la fin de ce parcours, il ne pourra pas rendre sa bicyclette dans la station de départ, puisqu'il n'y a pas de cycle eulérien tous les sommets ne sont pas de degré pair).

2. a) La matrice d'adjacence M du graphe (les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Le nombre de parcours possibles entre les sommets A et G de longueur 4 est le terme a_{17} de la matrice $M^4 = 14$.

c) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Le nombre de trajets différents qu'il a pu suivre est le terme a_{65} de la matrice $M^3 = 11$.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A.
À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, on détermine un tel parcours et le temps nécessaire pour l'effectuer :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
	0	∞ 7, A ____	∞ ∞ 17, B 11, A ____	∞ ∞ 22, B ____	∞ ∞ 21, B 21, F 20, C ____	∞ 13, A 13, A ____	∞ ∞ ∞ ∞ 39, F 27, D

on trouve le chemin A – B – D – G et le temps nécessaire est de 27 minutes.