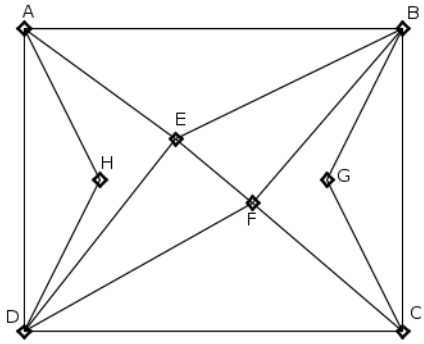
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 TERMINALE ES spé

EXERCICE 1 : On considère le graphe Γ suivant :



1. Le graphe Γ n'est pas complet puisque les sommets E et H ne sont pas adjacents.
2. Le graphe Γ est connexe puisque deux sommets quelconques sont reliés par au moins une chaîne.
3. Le tableau des degrés :

sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
degrés	4	5	4	5	4	4	2	2

Le graphe Γ admet des chaînes eulériennes puisque, d'après le théorème d'Euler, le graphe est connexe et il a exactement deux sommets de degré impair. Une telle chaîne : B – A – D – C – B – G – C – F – B – E – F – D – E – A – H – D.

4. Comme le graphe a deux sommets de degré impair, il n'y a pas de cycle eulérien. Le graphe admet un cycle eulérien s'il est connexe et si tous les sommets sont de degré pair.
Si on ajoute l'arête entre les sommets B et D, le degré de B et de D passe à 6. Tous les degrés sont pairs, et le graphe admet un cycle eulérien.
5. Un encadrement du nombre n chromatique du graphe Γ :
ordre du plus grand sous-graphe complet $\leqslant n \leqslant$ degré maximal + 1 ; d'où $3 \leqslant n \leqslant 6$.
6. Pour déterminer le nombre chromatique, on utilise l'algorithme de Welsh-Powell :

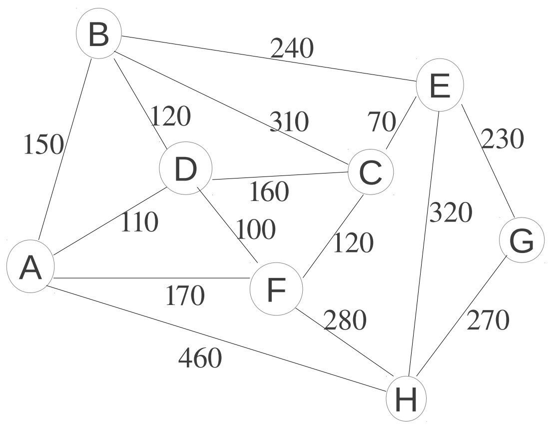
sommets	B	D	A	C	E	F	G	H
degrés	5	5	4	4	4	4	2	2

On obtient une coloration avec trois couleurs, donc le nombre chromatique est 3.
7. Une coloration du graphe a été obtenu à la question précédente.
8. La matrice M associée à ce graphe Γ :

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

9. Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet C, on note le terme a_{13} de la matrice M^3 ;
on trouve 7.
Toutes ces chaînes : A – B – G – C ; A – B – F – C ; A – E – F – C ;
A – H – D – C ; A – D – F – C ; A – E – D – C ; A – E – B – C.

EXERCICE 2 : Le graphe Γ suivant représente le plan d'un parcours de santé.
Le sommet A représente son accès.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H désignent les différentes activités de ce parcours.
Une arête représente l'allée reliant deux activités et est pondérée par la distance de parcours, exprimée en mètres, entre ces deux activités.



1. Pour nettoyer les allées du parcours, les services techniques utilisent une balayeuse automobile.
a) Cette balayeuse n'emprunte chaque allée qu'une fois et une seule s'il existe une chaîne eulérienne.
Tableau des degrés :

sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
degrés	4	4	4	4	4	4	2	4

Le graphe est connexe et tous les degrés sont pairs, donc il existe une chaîne eulérienne. Un tel chemin :

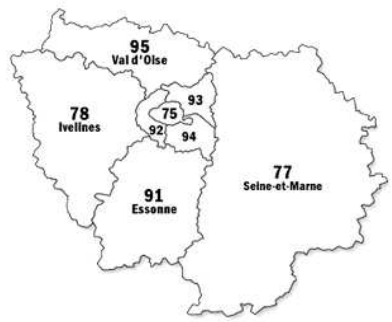
b) La balayeuse pourra revenir à son point de départ, puisqu'il existe des cycles eulériens (tous les degrés sont pairs).
2. Les services de secours basés au point A doivent intervenir à l'activité G.
On utilise l'algorithme de Dijkstra pour obtenir l'itinéraire le plus court :
On part du sommet A qui a une arête vers B, D, F et H. Puis de B, vers C, D et E ; puis de D vers C, F ; puis de F

vers C, H ; puis de E vers H, G ; puis de H vers G :

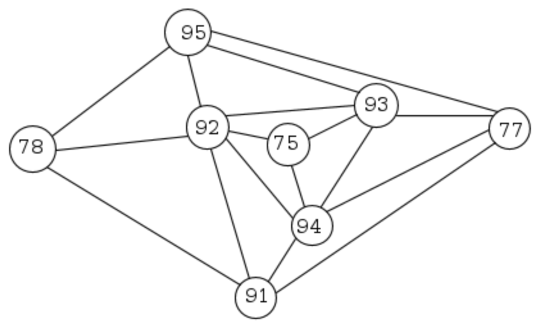
Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
	0	∞ 150, A ____	∞ ∞ 460, B 290, F 460, E 270, D ____	∞ 110, A 270, B 110, A ____	∞ ∞ 390, B 340, C ____	∞ 170, A 210, D 170, A ____	∞ ∞ ∞ 720, H 720, H 570, E ____	∞ 460, A 450, F 660, E 450, E ____

Le chemin le plus court est A – D – C – E – G et de longueur 570 mètres.

EXERCICE 3 : La carte ci-contre représente la région Île de France et ses huit départements.



1. Le graphe dont les sommets sont les départements et les arêtes les frontières communes :



2. Le tableau des degrés des sommets :

sommets	75	77	78	91	92	93	94	95
degrés	3	4	3	4	6	5	5	4

3. Un encadrement du nombre chromatique n du graphe est : Le plus grand sous-graphe complet est 75 – 92 – 93 – 94, d'ordre 4. Le degré maximal est 6, d'où l'encadrement : $4 \leqslant n \leqslant 7$.

4. Un coloriage de la carte tel que deux départements ayant des frontières communes n'aient pas la même couleur, avec le minimum de couleurs est une coloration du graphe à l'aide de l'algorithme de Welsh-Powell :

sommets	92	93	94	77	91	95	75	78
degrés	6	5	5	4	4	4	3	3

On obtient un coloriage avec 4 couleurs. Le nombre chromatique est donc 4.

EXERCICE 4 : Construction d'un graphe simple non connexe n'ayant pas de sommet isolé, d'ordre 7 et dont la somme des degrés est égale à 16 :
Simple : pas de boucle et pas plus d'une arête entre deux sommets ;
non connexe : il doit exister deux sommets qui ne sont pas liés par une chaîne ;
ordre 7 : il y a 7 sommets ;
somme des degrés est égale à 16 : il doit y avoir 8 arêtes.
Voici une solution :