

EXERCICE 1 (10 points)

Dans le cadre de la restructuration de son entreprise, afin de garantir la stabilité du nombre d'emplois, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 82 % de ses employés ne travaillent que le matin.

Pour cela, il décide que désormais :

- 20 % des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante.
- 5 % des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante.

On note :

A : « L'employé travaille le matin » et B : « L'employé travaille l'après-midi ».

1. a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
b) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
2. La semaine notée 0, semaine de la décision, 60 % des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi.

On note $P_n = (x_n \ y_n)$ l'état probabiliste la semaine n , n -ième semaine après la prise de décision.

- a) Donner la matrice ligne $P_0 = (x_0 \ y_0)$ décrivant l'état initial des employés dans cette entreprise.
- b) Écrire une relation entre x_{n+1} et x_n et y_n .
- c) Calculer P_2 et P_{10} .
- d) En déduire la probabilité qu'un employé travaille le matin lors de la semaine 2, puis lors de la semaine 10.
3. Soit $P = (x \ y)$ l'état probabiliste stable.
 - a) Démontrer que x et y vérifient l'égalité $x = 0,8x + 0,95y$.
 - b) Déterminer x et y .
 - c) Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (10 points)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :

À chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n -ième intersection,
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange à la n -ième intersection,
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n -ième intersection,
- $P_n = (V_n \ O_n \ R_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n -ième feu tricolore.

1. a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation, les sommets étant notés V, O, R.
b) Donner la matrice de transition M de ce graphe (les sommets sont dans l'ordre V, O, R):
2. a) Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 et P_4 .
b) Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?
3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 et P_7 .
4. On note $P = (x \ y \ z)$ l'état probabiliste stable.
 - a) Déterminer x , y et z .
 - b) Donner une interprétation concrète de ce résultat.