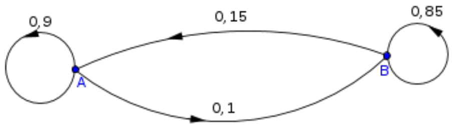
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 TERMINALE ES spé

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale. Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale.
Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition :
10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre. La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.
1. La matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial et donc $P_0 = (0{,}2 \quad 0{,}8)$.
2. Le graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale représentant la situation :



3. a) La matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets : $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.
b) La matrice ligne $P_1 = P_0 M = (0{,}3 \quad 0{,}7)$ donnant l'état probabiliste la semaine 1.
4. La matrice ligne $P_{10} = P_0 M^{10} = (0{,}577 \quad 0{,}423)$. La dixième semaine, environ 57,7 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et 42,3 % préfèrent Boréale.

5. Pour tout entier naturel n, on a $a_n + b_n = 1$, donc $b_n = 1 - a_n$.
$P_{n+1} = (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = P_n M = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix} = (0{,}9a_n + 0{,}15b_n \quad 0{,}1a_n + 0{,}85b_n)$,
donc $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}15b_n = 0{,}9a_n + 0{,}15(1 - a_n) = 0{,}75a_n + 0{,}15$.

6. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = a_n - 0{,}6$.
a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}75a_n + 0{,}15 - 0{,}6 = 0{,}75a_n - 0{,}45 = 0{,}75(a_n - 0{,}6) = 0{,}75u_n$.
Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $u_0 = a_0 - 0{,}6 = 0{,}2 - 0{,}6 = -0{,}4$.
b) Ainsi, $u_n = -0{,}4 \times (0{,}75)^n$. La raison de la suite est strictement comprise entre 0 et 1, donc la suite converge vers 0, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
c) Comme $u_n = a_n - 0{,}6$, on en déduit que $a_n = u_n + 0{,}6 = -0{,}4 \times (0{,}75)^n + 0{,}6$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$.

7. L'état stable du graphe probabiliste est $(0{,}6 \quad 0{,}4)$ puisque cet état stable $(a \quad b)$ vérifie $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $b = 1 - a$.

BONUS : Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
On a alors $P = PM$, soit $(a \quad b) = (a \quad b) \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix} = (0{,}9a + 0{,}15b \quad 0{,}1a + 0{,}85b)$, d'où le système :

$$\begin{cases} a = 0{,}9a + 0{,}15b \\ b = 0{,}1a + 0{,}85b \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 0{,}1a - 0{,}15b = 0 \\ -0{,}1a + 0{,}15b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}15 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}15 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; le système équivaut à $AX = B$ qui équivaut à

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$, donc $a = 0{,}6$, $b = 0{,}4$.