CORRECTION DEVOIR MAISON N° 1 TERMINALE S 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1. a) Pour tout réel x, on sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$, et $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

c) L'encadrement précédent permet d'affirmer que la courbe C est située entre la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_2) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x + 1$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 1$, soit $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Les solutions de ces équations sont les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $k\pi + 1$.

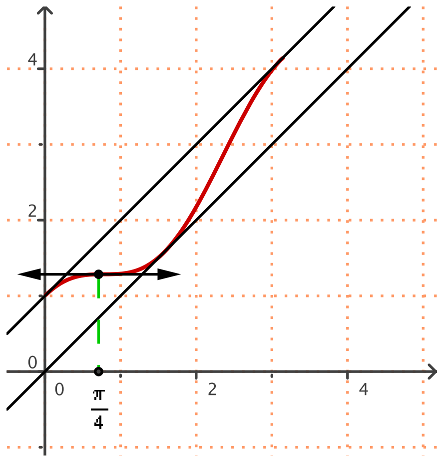
3. a) La fonction f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, et la dérivée de u^2 est $2uu'$. D'où, pour tout réel x, $f'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x)$.

b) On sait que, pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant -\sin(2x) \leqslant 1$, et $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2$. Donc la dérivée est positive et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 1$, équivaut à $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$			$\pi + 1$



b) Représentation graphique de f sur $[0; \pi]$:

5. a) Pour tout réel x, on a $f(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x+\pi) = x + \pi + \cos^2(x)$ car $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, donc $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Pour $x \in [0; \pi]$, soit $M(x; y)$ un point de la courbe C.
Comme $f(x + \pi) = f(x) + \pi$, le point de la courbe d'abscisse $(x + \pi)$ a pour ordonnée $f(x + \pi) = f(x) + \pi = y + \pi$.
On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur $[\pi; 2\pi]$ par une translation de vecteur $\pi\vec{i} + \pi\vec{j} = \pi(\vec{i} + \vec{j})$. Etc...
On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteur $k\pi\vec{i} + k\pi\vec{j}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.