DEVOIR MAISON N° 2 **TERMINALE S 4**

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2. a) Montrer que pour tout réel x de D_f, $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c) Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe C_f.

3. Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C_f.

4. Étude de la dérivabilité de f en -1 et en 1:

a) Montrer que $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1$. En déduire $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. La fonction f est-elle dérivable en -1 ?

b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de dérivabilité .

b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

6. Tracer la courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, -1, 1 et 2.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{5u_n-3}{u_n+1}$ et $u_0 = 2$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 < u_n < 3$.

b) En déduire les variations de la suite (u_n).

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

3. On pose $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n-1}$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).