EXERCICE 1 : 1.l'ensemble de définition D_f de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 1 \geqslant 0$.
Soit $x^2 \geqslant 1$, soit $x \in \,]-\infty\,;-1] \cup [1;+\infty[$. Donc $D_f = \,]-\infty\,;-1] \cup [1;+\infty[$.

2. a) Pour tout réel x de D_f, $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$ en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$.

3. Pour montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à C_f, on étudie $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-2x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-1}+x)$. On peut écrire $\sqrt{x^2-1}+x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{f(x)}$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-2x)) = 0$. Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $-\infty$.

4. Étude de la dérivabilité de f en -1 et en 1:

a) Pour $x < -1$: $x - 1 < 0$, d'où $-x+1 > 0$ et $-x-1 > 0$. Ainsi $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{x+1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 1 = \dfrac{\sqrt{(-x+1)(-x-1)}}{\sqrt{(-x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{-x+1}{-x-1}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1$. D'où $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-1} (x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x+1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en -1.

b) Pour $x > 1$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1$.

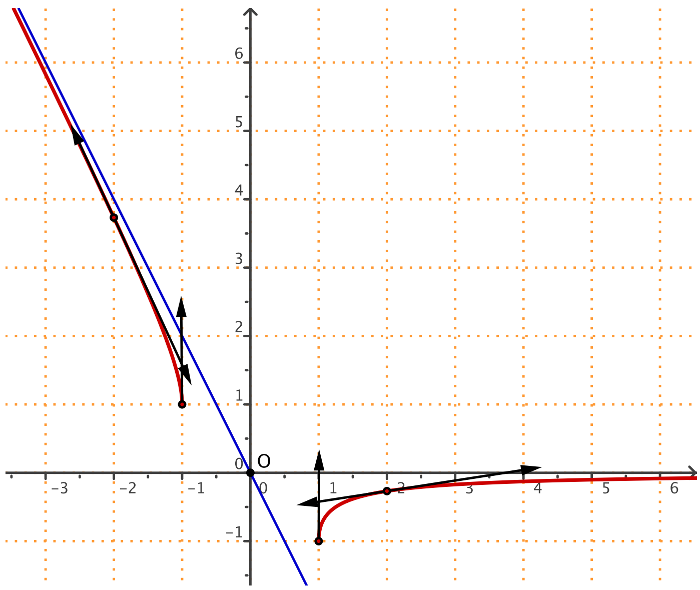
D'où $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en 1.

5. a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[\, \cup\,]1;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.
D'où $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur:
Si $x < -1$, x et $-\sqrt{x^2-1}$ sont négatifs, donc $f'(x) \leqslant 0$.
Si $x > 1$, on a $0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2$, donc $\sqrt{x^2-1} \leqslant x$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$;
et $x - \sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

b) Le tableau de variations de f sur D_f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	Non définie	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	Non définie	-1	↗	0

6. La courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, -1, 1 et 2:



EXERCICE 2

1. a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 < u_n < 3$: On peut écrire $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{u_n + 1} = 5 - \dfrac{8}{u_n + 1}$.

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $1 < u_0 < 3$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: Supposons que, pour un entier naturel k, $1 < u_k < 3$, et montrons que $1 < u_{k+1} < 3$:

$1 < u_k < 3$ entraîne $2 < u_k + 1 < 4$, puis $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{u_k + 1} < \dfrac{1}{2}$, puis $-4 < \dfrac{-8}{u_k + 1} < -2$, puis $1 < 5 - \dfrac{8}{u_k + 1} < 3$;

ainsi $1 < u_{k+1} < 3$. Donc, pour tout entier naturel n, $1 < u_n < 3$.

b) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante, c'est-à-dire que, pour tout entier n, $u_{n+1} > u_n$:

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{7}{3}$ donc $u_1 > u_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: Supposons que, pour un entier naturel k, $u_{k+1} > u_k$, et montrons que $u_{k+2} > u_{k+1}$:

$u_{k+1} > u_k$ entraîne $u_{k+1} + 1 > u_k + 1$, puis $\dfrac{1}{u_{k+1} + 1} < \dfrac{1}{u_k + 1}$, puis $\dfrac{-8}{u_{k+1} + 1} > \dfrac{-8}{u_k + 1}$, puis $5 + \dfrac{-8}{u_{k+1} + 1} > 5 + \dfrac{-8}{u_k + 1}$;

ainsi $u_{k+2} > u_{k+1}$. Donc la suite (u_n) est croissante.

c) Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 3, elle est convergente.

3. a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{\dfrac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 3}{\dfrac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 1} = \dfrac{\dfrac{5u_n - 3 - 3(u_n + 1)}{u_n + 1}}{\dfrac{5u_n - 3 - (u_n + 1)}{u_n + 1}} = \dfrac{2u_n - 6}{4u_n - 4} = \dfrac{2(u_n - 3)}{4(u_n - 1)} = \dfrac{1}{2}\ v_n$. Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 3}{u_0 - 1} = -1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) Donc $v_n = -1\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 1 - (0{,}5)^n$. De $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$, on déduit que $v_n\,(u_n - 1) = u_n - 3$, puis $u_n\,(v_n - 1) = v_n - 3$ et

$u_n = \dfrac{v_n - 3}{v_n - 1}$, donc $u_n = \dfrac{-(0{,}5)^n - 3}{-(0{,}5)^n - 1}$.

2. La raison de la suite (v_n) étant strictement comprise entre 0 et 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.