DEVOIR MAISON N° 3 **TERMINALE S 4**

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{2u_n+3}$ et $u_0 = 0$.

1. On considère la fonction g définie sur [0; + [par $g(x) = \sqrt{2x+3}$. À l'aide de la courbe représentative de g et de la droite d'équation $y = x$, représenter les 6 premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer les variations et la convergence de cette suite.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant deux méthodes différentes :

Première méthode :

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Deuxième méthode :

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant 3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}(3 - u_n)$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (3 - u_0)$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes:

(1) pour tout nombre réel x, $f'(x)^2 - f(x)^2 = 1$;

(2) $f'(0) = 1$;

(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

b) Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la dérivée seconde de f.

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c) En déduire les fonctions u et v.

d) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

5. a) Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).