DEVOIR MAISON N° 4 **TERMINALE S 4**

EXERCICE 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de u_0 et v_0 ($u_0 < v_0$), et pour tout entier naturel n par:

$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 2v_n}{3}$.

1. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

2. a) Étudier les variations des suites (u_n) et (v_n) .

b) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

3. On considère à présent la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{2}{3}u_n + v_n$.

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} k(k+1)$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n \dfrac{n}{n+1} + n + 2$.

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer u_{10} puis u_{20}.

4. a) Représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite (u_n).

b) Conjecturer le type de courbe sur lequel les points $(n; u_n)$ sont situés.

5. a) Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?

b) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 3

1. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

2. On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée impaire. On pose, pour tout réel x, $g(x) = f(x) - f(-x)$.

Montrer que g est une fonction constante. Déterminer cette constante. Que peut-on en déduire pour f ?

3. On considère une fonction f définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et paire. Soit a un réel quelconque.

Montrer que les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses a et $-a$ sont sécantes en un point de l'axe des ordonnées.

4. On considère une fonction f définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit a un réel quelconque.

Justifier la position des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses a et $-a$.