CORRECTION DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE S 4

EXERCICE 1: 1. a) On a $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+2v_n}{3} - \dfrac{2u_n+v_n}{3} = \dfrac{(2u_n+v_n)/3+2v_n-2u_n-v_n}{3} =$ $\dfrac{2u_n+v_n+3v_n-6u_n}{9} = \dfrac{4(v_n-u_n)}{9} = \dfrac{4w_n}{9}$. Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{9}$ et $w_0 = v_0 - u_0 > 0$.

b) Ainsi $w_n = (v_0 - u_0)\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$. Comme $0 < \dfrac{4}{9} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2. a) Étude des variations des suites (u_n) et (v_n) :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n+v_n}{3} - u_n = \dfrac{v_n-u_n}{3}$. Comme pour tout entier n, $w_n = (v_0 - u_0)\left(\dfrac{4}{9}\right)^n > 0$, alors $v_n - u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$, et la suite (u_n) est strictement croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}+2v_n}{3} - v_n = \dfrac{(2u_n+v_n)/3+2v_n-3v_n}{3} = \dfrac{2u_n+v_n-3v_n}{9} = \dfrac{2(u_n-v_n)}{9} < 0$ d'après $v_n - u_n > 0$, $v_{n+1} - v_n < 0$, et la suite (v_n) est strictement décroissante.

b) Pour montrer que ces deux suites sont adjacentes, il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$. Or $w_n = v_n - u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

3. a) On a $t_{n+1} = v_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+2v_n}{3} + \dfrac{2(2u_n+v_n)}{9} = \dfrac{2u_n+v_n+6v_n+4u_n+2v_n}{9} = \dfrac{6u_n+9v_n}{9} = v_n + \dfrac{2}{3}u_n = t_n$.

Donc la suite (t_n) est constante égale à $t_0 = v_0 + \dfrac{2}{3}u_0$.

b) On a donc le système

$\begin{cases} w_n = v_n - u_n \\ t_n = v_n + \dfrac{2}{3}u_n \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} u_n = \dfrac{3}{5}(t_n - w_n) \\ v_n = \dfrac{3}{5}t_n + \dfrac{2}{5}w_n \end{cases}$, soit $\begin{cases} u_n = \dfrac{3}{5}\left(v_0 + \dfrac{2}{3}u_0 - (v_0-u_0)\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right) \\ v_n = \dfrac{3}{5}\left(v_0 + \dfrac{2}{3}u_0 + \dfrac{2}{5}(v_0-u_0)\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right) \end{cases}$.

La limite des suites (u_n) et (v_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{5}v_0 + \dfrac{2}{5}u_0$.

EXERCICE 2 : 1. Les quatre premiers termes de la suite (u_n) : $u_1 = \dfrac{1}{1}\sum\limits_{k=1}^{k=1} k(k+1) = 1(1+1) = 2$.

$u_2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=2} k(k+1) = \dfrac{1}{2}(1\times 2 + 2\times 3) = 4$. $u_3 = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{k=3} k(k+1) = \dfrac{1}{3}(1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4) = \dfrac{20}{3}$.

$u_4 = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{k=4} k(k+1) = \dfrac{1}{4}(1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5) = 10$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n\dfrac{n}{n+1} + n + 2$:

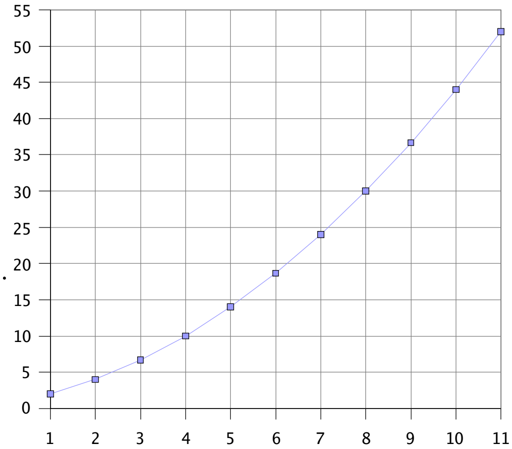
Initialisation : Pour $n = 1$: $u_1\dfrac{1}{1+1} + 1 + 2 = 4 = u_2$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un $k \geqslant 1$, $u_{k+1} = u_k\dfrac{k}{k+1} + k + 2$ et montrons que $u_{k+2} = u_{k+1}\dfrac{k+1}{k+2} + k + 1 + 2$:

$u_{k+2} = \dfrac{1}{k+2}\sum\limits_{p=1}^{p=k+2} p(p+1) = \dfrac{1}{k+2}\sum\limits_{p=1}^{p=k+1} p(p+1) + \dfrac{1}{k+2}(k+2)(k+3) = \dfrac{1}{k+2}(k+1)u_{k+1} + k + 3$, ce qu'il fallait démontrer. Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n\dfrac{n}{n+1} + n + 2$.

3. A l'aide de la calculatrice, $u_{10} = 44$ et $u_{20} = 154$.

4. a) Représentation graphique des 10 premiers termes de la suite (u_n):



b) Les points $(n; u_n)$ semblent situés sur une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

5. a) On peut donc supposer que $u_n = f(n)$ où $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b) Démontrons cette conjecture: Comme $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_4 = 10$, on obtient $a + b + c = 2$, $4a + 2b + c = 4$ et $16a + 4b + c = 10$.

En soustrayant les deux premières équations, on trouve $3a + b = 2$ et en soustrayant la première de la troisième équation, on trouve $15a + 3b = 8$.

On résout le système

$\begin{cases} 3a+b=2 \\ 15a+3b=8 \end{cases}$. On trouve $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = 1$, puis $c = 2 - a - b = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + x + \dfrac{2}{3} = \dfrac{x^2+3x+2}{3} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{3}$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{3}$:

Initialisation : $u_1 = 2$ et $\dfrac{(1+1)(1+2)}{3} = 2$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un $k \geqslant 1$, $u_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{3}$ et montrons que $u_{k+1} = \dfrac{(k+2)(k+3)}{3}$:

$u_{k+1} = u_k \dfrac{k}{k+1} + k + 2 = \dfrac{(k+1)(k+2)}{3} \dfrac{k}{k+1} + k + 2 = \dfrac{k(k+2)}{3} + k + 2 = \dfrac{k(k+2)+3(k+2)}{3} = \dfrac{(k+2)(k+3)}{3}$,

ce qu'il fallait démontrer. Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{3}$.

<u>EXERCICE 3</u>

1. Soit f une fonction paire sur son ensemble de définition D_f. Pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$. En dérivant les deux membres de cette égalité, il vient $-f'(-x) = f'(x)$, soit $f'(-x) = -f'(x)$ ce qui signifie que f' est impaire.

2. On dérive la fonction g : $g'(x) = f'(x) - (-f'(-x)) = f'(x) + f'(-x) = f'(x) - f'(x) = 0$ car f' est impaire.
Pour tout réel x, la dérivée de g est nulle, donc la fonction g est constante égale à $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.
Donc pour tout réel x, $f(x) - f(-x) = 0$, soit $f(-x) = f(x)$. Ce qui prouve que f est une fonction paire. Ce qui est la réciproque de la question 1.

3. On considère une fonction f définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et paire. Soit a un réel quelconque.
Les équations des tangentes aux points d'abscisses a et $-a$ sont :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ et $y = f'(-a)(x + a) + f(-a) = -f'(a)(x + a) + f(a)$ puisque f est paire et donc f' est impaire.
Ces deux tangentes se coupent en un point d'abscisse vérifiant : $f'(a)(x - a) + f(a) = -f'(a)(x + a) + f(a)$, ce qui peut s'écrire $2f'(a)x = 0$.
Si $f'(a) = 0$, alors $f'(-a) = -f'(a) = 0$ et les tangentes sont horizontales, avec $f(a) = f(-a)$, donc elles se coupent sur l'axe des ordonnées.
Si $f'(a) \neq 0$, alors $x = 0$ et $y = f(a) - af'(a)$, point de l'axe des ordonnées.

4. On considère une fonction f définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit a un réel quelconque.
Montrons d'abord que f' est paire: Comme f est impaire sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$. On dérive les deux membres de cette égalité: $-f'(-x)) = -f'(x)$, soit $f'(-x)) = f'(x)$, ce qui signifie que f' est paire.
Les équations des tangentes aux points d'abscisses a et $-a$ sont :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ et $y = f'(-a)(x + a) + f(-a) = f'(a)(x + a) - f(a)$ puisque f est impaire et f' paire.
Ces deux tangentes ont des coefficients directeurs égaux à $f'(a)$ donc ces deux droites sont parallèles.
Elles coupent l'axe des ordonnées respectivement aux points d'ordonnées $f(a) - af'(a)$ et $-f(a) + af'(a)$. Ces deux ordonnées sont opposés, donc ces deux points sont symétriques par rapport à l'origine du repère.