CORRIGE **DEVOIR MAISON N° 5** **TERMINALE S 4**

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe $z = x + iy$ et $z^2 = a + ib$ où x, y, a, b sont des réels.

1. $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib$, donc $a = x^2 - y^2$ et $b = 2xy$. Si $|z| = 1$, alors $x^2 + y^2 = 1$, donc $y^2 = 1 - x^2$ et $a = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1$. Ainsi $x^2 = \dfrac{1+a}{2}$ et $y^2 = 1 - x^2 = \dfrac{1-a}{2}$.

2. On suppose que $|z| = 1$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{8}$. Dans ce cas, $z = 1(\cos(\dfrac{\pi}{8}) + i\sin(\dfrac{\pi}{8})) = e^{i\frac{\pi}{8}}$,

d'où $z^2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. On a donc $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $x = \cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+a}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et

$y = \sin\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-a}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

EXERCICE 2

Soit α un réel différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $t = \tan\alpha$.

1. La forme exponentielle de $z = \dfrac{1+it}{1-it} = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$.

2. La forme algébrique de $z = \dfrac{1+it}{1-it} = \dfrac{(1+it)(1+it)}{(1-it)(1+it)} = \dfrac{1+2it-t^2}{1+t^2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + i\dfrac{2t}{1+t^2}$.

3. La forme trigonométrique de z est $\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$ donc on en déduit que $\cos(2\alpha) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2\alpha) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x + e^{-x} > 0$, le dénominateur de f ne s'annule pas, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - 1/e^x}{e^x + 1/e^x} = \dfrac{(e^{2x}-1)/e^x}{(e^{2x}+1)/e^x} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

3. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$. En posant $X = e^{2x}$, $f(x) = \dfrac{X-1}{X+1}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X-1}{X+1} = 1$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. On en déduit que la courbe C admet deux asymptotes horizontales, une en $+\infty$ d'équation $y = 1$ et l'autre en $-\infty$ d'équation $y = -1$.

4. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions qui le sont.

$f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ et $1 - f(x)^2 = 1 - \left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2 = \dfrac{(e^{2x}+1)^2-(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.

b) Comme $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ qui est strictement positif, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. a) La fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1; 1[$. Donc pour tout réel $m \in]-1; 1[$, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution. Pour $m \notin]-1; 1[$, il n'y a aucune solution à l'équation $f(x) = m$.

b) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a une unique solution : $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}$ équivaut à $2(e^{2x} - 1) = e^{2x} + 1$

équivaut à $e^{2x} = 3$ équivaut à $\ln(e^{2x}) = \ln 3$ équivaut à $2x = \ln 3$ équivaut à $x = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$.

6. Pour tous réels a et b, $\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} = \frac{\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}+\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}}{1+\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}} = \frac{\frac{(e^{2a}-1)(e^{2b}+1)+(e^{2a}+1)(e^{2b}-1)}{(e^{2b}+1)(e^{2a}+1)}}{\frac{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)+(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)}} =$

$\frac{(e^{2a}-1)(e^{2b}+1)+(e^{2a}+1)(e^{2b}-1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)+(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)} = \frac{2e^{2(a+b)}-2}{2e^{2(a+b)}+2} = \frac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1} = f(a+b)$.

7. La fonction g est la bijection réciproque de la fonction f si pour tout réel x, $g\circ f(x) = x$, et si pour tout réel x de $]-1; 1[$, $f\circ g(x) = x$.

Or, pour tout réel x, $g\circ f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}}{\frac{2}{e^{2x}+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e^{2x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln e^{2x} = \frac{2x}{2} = x.$

Et pour tout réel x de $]-1; 1[$, $f\circ g(x) = \frac{e^{2g(x)}-1}{e^{2g(x)}+1} = \frac{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}-1}{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}+1} = \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} = \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1-x}}{\frac{1+x+1-x}{1-x}} = \frac{2x}{2} = x.$

Donc la fonction g est la bijection réciproque de la fonction f .

Représentation graphique de f et de g :