

Partie A: On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1) - x$ et

$$g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

Partie B: On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.
3. On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$.

A l'aide de la partie A, montrer que $S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$.

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n .

5. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Partie C: 1. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. En déduire que (u_n) est convergente. On note l sa limite.

3. Montrer que $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$, et en déduire un encadrement de l .

Partie D: 1. Déduire de la partie A que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

a) Montrer que (v_n) est décroissante.

b) Montrer que (w_n) est croissante.

c) Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

3. Trouver une valeur approchée de leur limite commune à 10^{-3} près.