DEVOIR MAISON N° 7 TERMINALE S 4

EXERCICE 1

On admet le théorème suivant:

Soit a et b deux réels tels que $a \quad b$, et f une fonction dérivable sur $[a; b]$ telle que $f\,'$ est continue sur $[a; b]$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$). La longueur L, en unité de longueur, de l'arc de courbe défini par la courbe C entre les points A(a; $f(a)$) et B(b; $f(b)$) est égale à L = $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(f\,'(x)\right)^2}\,dx$.

La chaînette est la courbe obtenue lorsqu'on suspend une chaîne entre deux points A et B. Cette courbe a une équation de la forme $y = f(x)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Calculer la longueur de la chaînette entre les points d'abscisses -1 et 1.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+3}$.

2. Calculer alors I = $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,dt$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

1. Pour $a \geqslant 1$, déterminer $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_1^a f(t)\,dt$ en fonction de a.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{I}(a)$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x^2)\, e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier les variations de f.

2. A l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer A = $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. Interpréter graphiquement A.

3. Pour tout réel x de $[1; +\infty[$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$.

b) Déterminer l'expression de F(x) et calculer la limite de F en $+\infty$.

c) Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

4. On veut résoudre l'équation $\mathrm{F}(x) = -\mathrm{A}$.

a) Montrer que cette équation est équivalente à $2\ln(1 + x) = x$.

b) Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = 2\ln(1 + x) - x$.

c) Démontrer que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $2\ln(1 + x) = x$ a une unique solution α.

d) Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

e) Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.