CORRIGÉ **DEVOIR MAISON N° 7** **TERMINALE S 4**

EXERCICE 1 :

On a $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, d'où $1 + f'(x)^2 = 1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = f(x)^2$.

La longueur de la chaînette entre les points d'abscisses -1 et 1 est donc égale à L = $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ =

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{f(x)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$. Or, la fonction f est strictement positive sur ℝ comme somme de fonctions qui le sont,

donc L = $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}\Big[e^x - e^{-x}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1} - (e^{-1} - e^1)) = e - \frac{1}{e}$.

EXERCICE 2

1. Pour tout réel x de [2; +∞ [, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+3} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{a(x-1)(x+3)+bx(x+3)+cx(x-1)}{x(x+1)(x+3)} =$
$\dfrac{(a+b+c)x^2+(2a+3b-c)x-3a}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}$, et par identification des numérateurs, on obtient
$a + b + c = 4$, $2a + 3b - c = 13$ et $-3a = -9$. On trouve $a = 3$, et $b + c = 1$, $3b - c = 7$. On trouve $b = 2$ et $c = -1$.
Ainsi, $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{-1}{x+3}$. Sur [2; +∞ [, $\dfrac{3}{x} > 0$, $\dfrac{2}{x-1} > 0$ et $\dfrac{1}{x+3} > 0$.

2. I = $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,dt = \int_2^3 \left(\frac{3}{t} + \frac{2}{t-1} - \frac{1}{t+3}\right)dt = \Big[3\ln t + 2\ln(t-1) - \ln(t+3)\Big]_2^3$ = 3ln3 + 2ln2 – ln6 – (3ln2 + 2ln1 – ln5) =

3ln3 + 2ln2 – ln6 – 3ln2 + ln5 = 3ln3 – ln2 – ln3 – ln2 + ln5 = 2ln3 – 2ln2 + ln5 =ln $\dfrac{45}{4}$.

EXERCICE 3 : Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur [1; +∞ [par F(x) = $\dfrac{-1}{x}$.

1. Pour $a \geqslant 1$, I(a) = $\displaystyle\int_1^a f(t)\,dt = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}$.

2. $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{I}(a) = 1$ puisque $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a} = 0$. Interprétation graphique : l'aire située entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$ vaut 1. Cette aire représente une partie illimitée du plan !

EXERCICE 4

1. a) On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Pour tout réel x, $x^2 e^{-x} = 4\left(\dfrac{x}{2} e^{\frac{-x}{2}}\right)^2$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X e^{-X} = 0$, donc
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (1-x^2) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur ℝ comme produit et composée de fonctions qui le sont.
Et $f'(x) = -2x\,e^{-x} - (1-x^2)\,e^{-x} = (x^2 - 2x - 1)\,e^{-x}$ qui est du signe de $x^2 - 2x - 1$ puisque $e^{-x} > 0$ sur ℝ.
On calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4(-1) = 4 + 4 = 8 > 0$, il y a donc deux solutions réelles :
$x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Le polynôme $x^2 - 2x - 1$ est du signe de $a = 1$ pour les valeurs extérieures aux racines x_1 et x_2. Donc la fonction f est croissante sur]– ∞ ; $1 - \sqrt{2}$] et sur [$1 + \sqrt{2}$; + ∞ [, et elle est décroissante sur [$1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$].

2. On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 1 - x^2$. Alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = -2x$. A l'aide de la formule d'intégration par parties A = $\int_0^1 f(t)\,dt = \left[(1-x^2)(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^{-x}dx$. On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 2x$. Alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 2$. On obtient A = $\left[(1-x^2)(-e^{-x})\right]_0^1 - \left(\left[(2x)(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x}dx\right) = 0 + 1e^0 - (2(-e^{-1}) - 0 + 2\left[-e^{-x}\right]_0^1) =$ $1 - (2(-e^{-1}) + 2(-e^{-1} + 1)) = \frac{4}{e} - 1$. Interprétation graphique de A: Pour tout x de [0; 1], $f(x) \geqslant 0$, donc A est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et la courbe C.

3. a) Pour tout réel x de $[1; +\infty[$, $\int_1^x f(t)\,dt$ est la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$. Donc F est dérivable sur $[1; +\infty[$, et sa dérivée est $f(x)$.

b) On utilise les résultats de la question 2: $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \left[(1-t^2)(-e^{-t})\right]_1^x - \left(\left[(2t)(-e^{-t})\right]_1^x + 2\left[-e^{-t}\right]_1^x\right) =$
$\left[(-t^2-2t-1)(-e^{-t})\right]_1^x = (-x^2-2x-1)(-e^{-x}) - 4e^{-1} = (x+1)^2e^{-x} - 4e^{-1}$.

On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -4e^{-1}$.

c) La courbe représentative de F admet une asymptote horizontale d'équation $y = -4e^{-1}$ en $+\infty$.

4. L'équation $F(x) = -A$ est équivalente à $(x+1)^2e^{-x} - 4e^{-1} = -4e^{-1} + 1$, équivalent à $(x+1)^2e^{-x} = 1$, équivalent à $(x+1)^2 = e^x$, équivalent à $2\ln(1+x) = x$ pour x dans $[1; +\infty[$ (car $1 + x > 0$).

b) La fonction h est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont;
$h'(x) = \frac{2}{1+x} - 1 = \frac{1-x}{1+x} \leqslant 0$, car $1 + x > 0$ et $1 - x \leqslant 0$. Donc la fonction h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

c) Calcul de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$: $h(x) = 2\ln(1+x) - x = x\left(2\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = x\left(2\frac{\ln(1+x)}{1+x}\frac{1+x}{x} - 1\right)$.

On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln(1+x)}{1+x}\frac{1+x}{x} - 1\right) = -1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$. De plus, $h(1) = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 \simeq 0{,}4 > 0$. La fonction h est continue puisque dérivable et strictement décroissante de $[1; +\infty[$ dans $]-\infty; h(1)]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel k de $]-\infty; h(1)]$, il existe un unique réel c de $[1; +\infty[$ tel que $h(c) = k$.
Comme $0 \in\,]-\infty; h(1)]$, il existe un unique réel α de $[1; +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$, soit $2\ln(1+\alpha) = \alpha$.

d) Un encadrement de α à 10^{-3} près: à l'aide de la calculatrice, on trouve $2{,}512 < \alpha < 2{,}513$.

e) Comme $2\ln(1+\alpha) = \alpha$, $f(\alpha) = (1-\alpha^2)\,e^{-\alpha} = (1-\alpha^2)\,e^{-2\ln(1+\alpha)} = (1-\alpha^2)(1+\alpha)^{-2} = \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ dont une valeur approchée à 10^{-3} près est $-0{,}430$.