CORRIGE **DEVOIR MAISON N° 8** **TERMINALE S 4**

EXERCICE 1

1. a) La courbe représentative de f admet la droite (JK) d'équation $y = x + 1$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1)) = 0$. On pose alors $g(x) = f(x) - (x + 1)$. Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de deux fonctions qui le sont, admettant 0 comme limite en $+\infty$ et en $-\infty$, et $f(x) = x + 1 + g(x)$.

b) Le point J(0; 1) est centre de symétrie de la courbe C, donc pour tout réel x, $f(0 + x) + f(0 - x) = 2\times1$, soit $f(x) + f(-x) = 2$.

c) Ainsi, pour tout réel x, $g(x) + g(-x) = f(x) - (x + 1) + f(-x) - (-x + 1) = f(x) + f(-x) - 2 = 0$. Donc $g(-x) = -g(x)$, et la fonction g est impaire. On sait que la dérivée d'une fonction impaire est paire, donc $g'(x) = g'(-x)$.

Donc pour tout réel x, $f'(x) = 1 + g'(x)$ et $f'(-x) = 1 + g'(-x) = 1 + g'(x) = f'(x)$, d'où la dérivée de f est paire.

d) Soit $g(x)$ est de la forme $g(x) = (ax + b)\ e^{-x^2}$. On sait que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1 - e$; donc $g(0) = 0$, $g'(0) = f'(0) - 1 = 1 - e - 1 = -e$; ainsi, $g(0) = (a\times0 + b)\ e^0 = b = 0$. Et $g'(x) = (a - 2x(ax + b))\ e^{-x^2} = (-2ax^2 - 2bx + a)\ e^{-x^2}$; d'où $g'(0) = (-2a\times0 - 2b\times0 + a)\ e^0 = a = -e$; ainsi $g(x) = (-ex)\ e^{-x^2}$.

2. a) $g'(x) = (-e)\ e^{-x^2} + (-ex)(-2x)\ e^{-x^2} = (-e + 2ex^2)\ e^{-x^2} = (2x^2 - 1)\ e^{-x^2+1}$; et $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)\ e^{-x^2+1}$.

b) Pour étudier le sens de variations de f' sur $[0; +\infty[$, on dérive f' : f' est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions qui le sont :

$f''(x) = (4x)\ e^{-x^2+1} + ((2x^2 - 1)(-2x))\ e^{-x^2+1} = (-4x^3 + 6x)\ e^{-x^2+1} = (-2x)(2x^2 - 3)\ e^{-x^2+1}$.

Son signe dépend de $(-2x)(2x^2 - 3)$; on réalise un tableau de signes et le tableau de variations:

x	0		$\sqrt{3/2}$		$+\infty$
$-2x$	0	$-$		$-$	
$2x^2-3$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$1-e$	$\nearrow$	$1+2e^{-1/2}$	$\searrow$	1

En posant $X = x^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+(2X-1)e^{-X+1})$ $= 1$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$.

c) La fonction f' est continue car dérivable sur $[0; +\infty[$; de plus, sur $[\sqrt{3/2}\ ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ puisque f' est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$.

$f'([0; \sqrt{3/2}]) = [1 - e;\ 1 + 2\ e^{-1/2}]$ et $0 \in [1 - e;\ 1 + 2\ e^{-1/2}]$, donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$; de plus, $f'(0{,}51) \simeq -0{,}0055 < 0$ et $f'(0{,}52) \simeq 0{,}0475 > 0$, donc $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

d) Sur $[0; \alpha]$, la fonction f' est négative, donc f est décroissante et sur $[\alpha; +\infty[$, la fonction f' est positive, donc f est croissante.

e) Comme $f'(\alpha) = 0$, on a $1 + (2\alpha^2 - 1)\ e^{-\alpha^2+1} = 0$, donc $e^{-\alpha^2+1} = \dfrac{-1}{2\alpha^2-1}$. La fonction f admet un minimum en α, et

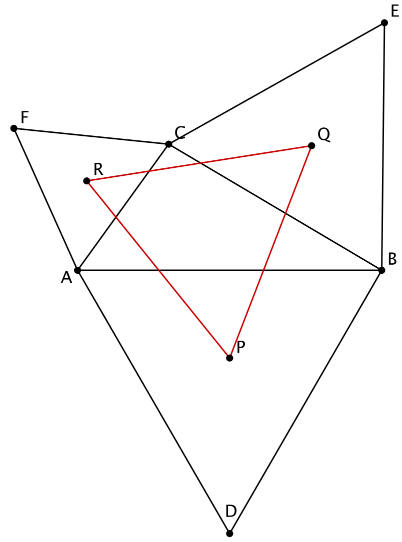
$$f(\alpha) = \alpha + 1 - e\alpha\ e^{-\alpha^2} = \alpha + 1 - \alpha\ e^{-\alpha^2+1} = \alpha + 1 - \alpha\ \frac{-1}{2\alpha^2-1} = \frac{2\alpha^3+2\alpha^2-1}{2\alpha^2-1}.$$

3. Pour étudier la position de C par rapport à la droite (JK) sur $[0; +\infty[$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - (x + 1) = g(x) = (-ex)\ e^{-x^2} < 0$ car $e^{-x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc C est au-dessous de (JK) sur $[0; +\infty[$.

Pour étudier la position de C par rapport à T sur $[0; +\infty[$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - ((1 - e)x + 1) = x + 1 + (-ex)\ e^{-x^2} - (1 - e)x - 1 = (ex)(1 - e^{-x^2})$ qui est du signe de $1 - e^{-x^2}$ sur $[0; +\infty[$: $1 - e^{-x^2} > 0$ équivaut à $e^{-x^2} < 1$ équivaut à $-x^2 < 0$ qui est vrai pour tout x de $]0; +\infty[$, donc C est au-dessus de T sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 2

On considère le triangle direct ABC et les triangles ABD, BCE CAF équilatéraux à l'extérieur de ABC.
Les points P, Q, et R sont les centres de gravité des triangles respectifs ABD, BCE, CAF.
On note *a, b, c, d, e, f, p, q, r* les affixes des points A, B, C, D, E, F, P, Q, R dans un repère (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) orthonormé du plan.



Le point P est le centre de gravité du triangle ABD, donc $p = \dfrac{a+b+d}{3}$.

Le point Q est le centre de gravité du triangle BCE, donc $q = \dfrac{b+c+e}{3}$.

Le point R est le centre de gravité du triangle ACF, donc $r = \dfrac{a+c+f}{3}$.

Pour montrer que le triangle PQR est équilatéral, il suffit de montrer que R est l'image de Q dans la rotation de centre P et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, soit $r-p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$:

$$r-p = \frac{a+c+f-(a+b+d)}{3} = \frac{(a-d)+(c-b)+(f-a)}{3}.$$

Le triangle BCE est équilatéral, donc le point C est l'image de E dans la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, donc $c-b = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-b)$.

Le triangle ACF est équilatéral, donc le point F est l'image de C dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, donc $f-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)$.

Le triangle ABD est équilatéral, donc le point A est l'image de B dans la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, donc $a-d = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-d)$.

Ainsi, $r-p = \dfrac{(a-d)+(c-b)+(f-a)}{3} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}(b-d)+e^{i\frac{\pi}{3}}(e-b)+e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)}{3} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}(b-d+e-b+c-a)}{3} =$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}\,\frac{b+c+e-(a+b+d)}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p).$$

On a donc $r-p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$. On a donc PR = $|r-p| = |q-p|$ = QP et $(\overrightarrow{PQ}\,;\overrightarrow{PR}) = \arg\left(\dfrac{r-p}{q-p}\right) = \arg e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\pi}{3}$.

Ainsi, le triangle PQR est équilatéral.