EXERCICE 1 : 1. Le tirage s'effectue au hasard et sans remise; on le suppose simultané, il s'agit donc de combinaisons. Le nombre de tirages possibles est $\binom{10}{2} = \frac{10\,!}{8\,!2\,!} = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$.

$p(A_0) = \frac{\binom{8}{2}}{45} = \frac{28}{45}$; $p(A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{45} = \frac{16}{45}$; $p(A_2) = \frac{\binom{2}{2}}{45} = \frac{1}{45}$.

2. Après ce premier tirage, il reste 8 boules dans l'urne. Le nombre de tirages possibles est $\binom{8}{2} = \frac{8\,!}{6\,!2\,!} = \frac{8\times 7}{2\times 1} = 28$.

a) $p_{A_0}(B_0)$ indique qu'il reste 6 boules rouges et 2 boules noires, donc $p_{A_0}(B_0) = \frac{\binom{6}{2}}{28} = \frac{15}{28}$.

$p_{A_1}(B_0)$ indique qu'il reste 7 boules rouges et 1 boule noire, donc $p_{A_1}(B_0) = \frac{\binom{7}{2}}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$. et $p_{A_2}(B_0)$.

$p_{A_2}(B_0)$ indique qu'il reste 8 boules rouges et aucune boule noire, donc $p_{A_2}(B_0) = \frac{\binom{8}{2}}{28} = \frac{28}{28} = 1$; c'est l'événement certain.

b) Les événements A_0, A_1, A_2 forment une partition, donc en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient $p(B_0) = p(B_0\cap A_0) + p(B_0\cap A_1) + p(B_0\cap A_2) = p_{A_0}(B_0)\times p(A_0) + p_{A_1}(B_0)\times p(A_1) + p_{A_2}(B_0)\times p(A_2) = \frac{15}{28}\times\frac{28}{45} + \frac{3}{4}\times\frac{16}{45} + 1\times\frac{1}{45} = \frac{28}{45}$.

c) On utilise la même démarche pour calculer $p(B_1)$: $p(B_1) = p(B_1\cap A_0) + p(B_1\cap A_1) + p(B_1\cap A_2) = p_{A_0}(B_1)\times p(A_0) + p_{A_1}(B_1)\times p(A_1) + p_{A_2}(B_1)\times p(A_2) = \frac{12}{28}\times\frac{28}{45} + \frac{1}{4}\times\frac{16}{45} + 0\times\frac{1}{45} = \frac{16}{45}$.

et $p(B_2) = p_{A_0}(B_2)\times p(A_0) + p_{A_1}(B_2)\times p(A_1) + p_{A_2}(B_2)\times p(A_2) = \frac{1}{28}\times\frac{28}{45} + 0\times\frac{16}{45} + 0\times\frac{1}{45} = \frac{1}{45}$.

On vérifie que $p(B_0) = p(A_0)$, $p(B_1) = p(A_1)$, $p(B_2) = p(A_2)$.

d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. La probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage est la probabilité conditionnelle $p_{B_1}(A_1) = \frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)} = \frac{4}{45}\times\frac{45}{16} = \frac{1}{4}$.

3. On considère l'événement R: « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne ». $p(R) = p(B_1\cap A_1) + p(A_0\cap B_2) = \frac{4}{45} + \frac{1}{45} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

EXERCICE 2 : Une urne contient 20 boules, 10 blanches et 10 noires indiscernables au toucher, portant des numéros tous différents. On effectue au hasard un tirage sans remise de 10 boules de l'urne.

1. a) Le nombre de tirages différents est $\binom{20}{10} = 184756$.

b) Pour k entier compris entre 0 et 10, un tirage comportant exactement k boules noires contient aussi $10 - k$ boules blanches, donc le nombre de tirages comportant exactement k boules noires est $\binom{10}{k}\times\binom{10}{10-k}$.

Or, pour k entier compris entre 0 et 10, $\binom{10}{k}=\binom{10}{10-k}$, donc ce nombre de tirages $\binom{10}{k}^2$.

c) Ainsi, le nombre de tirages différents est égal à la somme des nombres de tirages de k boules noires, k variant de 0 à 10, soit $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{10}{k}^2 = \binom{20}{10}$.

2. Une urne contient $2n$ boules, n blanches et n noires indiscernables au toucher, numérotées de 1 à $2n$.
On tire n boules de cette urne. Pour k entier compris entre 0 et n, un tirage comportant exactement k boules noires contient aussi $n-k$ boules blanches. Le nombre de tirages comportant exactement k boules noires est $\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$. Donc $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\times n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.