EXERCICE 1 **(13 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. a) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction f.
b) En utilisant la question 2, déterminer une autre asymptote oblique à C.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
7. Préciser l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1.
8. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Partie B : On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ et $g(0) = 0$, la fonction f étant celle définie dans la partie A.

1. Montrer que la fonction g est continue en 0.
2. Est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.
3. Interpréter ce dernier résultat graphiquement.

EXERCICE 2 **(7 points)**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. On pose $v_n = u_n - 3$.
3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
4. En déduire v_n , puis u_n en fonction de n.
5. Déterminer les variations de la suite (u_n).
6. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_n + 2n$. Étudier les variations de (w_n).