EXERCICE 1 **(10 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. On considère les points M et M' de la courbe C d'abscisses respectives x et $-x$.
a) Déterminer les coordonnées du point A milieu du segment [MM'].
b) Que représente le point A pour la courbe C ? Justifier la réponse.

5. Montrer que, pour tout réel k dans l'intervalle $]0; 1[$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = k$.

6. a) Déterminer un point de la courbe C admettant une tangente de coefficient directeur égal à $\dfrac{1}{4}$.
b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
c) Que peut-on en déduire pour les tangentes à la courbe C ?

EXERCICE 2 **(10 points)**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$.
a) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 4 cm ou 4 carreaux), ainsi que la droite d'équation $y = x$. Construire alors les six premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
b) Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) ?

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
b) Déterminer les variations de la suite (u_n).
c) La suite (u_n) converge-t-elle ?

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
b) Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de (v_n).
c) En déduire la limite de la suite (u_n).