EXERCICE 1: 1. Pour tout réel x, on a $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, d'où $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1+1/e^x} = \dfrac{1}{(e^x+1)/e^x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-x}) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 0$.

b) Interprétation graphique : la courbe C admet deux asymptotes horizontales: la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $-\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et composée de fonctions qui le sont. En utilisant l'expression $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ puisque e^x est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) Les coordonnées de A milieu de [MM'] sont données par $x_A = \dfrac{x-x}{2} = 0$ et $y_A = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} =$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \dfrac{e^x(1+e^{-x})+e^{-x}(1+e^x)}{2(1+e^x)(1+e^{-x})} = \dfrac{e^x+e^xe^{-x}+e^{-x}+e^{-x}e^x}{2(1+e^x)(1+e^{-x})} = \dfrac{e^x+e^{-x}+2}{2(e^x+e^{-x}+2)} = \dfrac{1}{2}$. A$(0;\ \dfrac{1}{2})$.

b) Le point A est le centre de symétrie de la courbe C. En effet, pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 1 = 2\times \dfrac{1}{2}$.

5. La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$, donc pour tout réel k de $]0; 1[$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = k$.

6. a) Un point d'abscisse a de la courbe C admet une tangente de coefficient directeur égal à $\dfrac{1}{4}$ si $f'(a) = \dfrac{1}{4}$. On cherche donc à résoudre l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{4}$, soit $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1}{4}$, soit $4e^x = (1 + e^x)^2$ et en développant, on obtient $e^{2x} + 2e^x + 1 = 4e^x$, soit $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$, soit $(1 - e^x)^2 = 0$, donc $1 - e^x = 0$, soit $e^x = 1$, soit $x = 0$. Donc le point de C ayant une tangente de coefficient directeur égal à $\dfrac{1}{4}$ est le point de coordonnées $(0; f(0)) = (0;\ \dfrac{1}{2})$.

b) On cherche le signe de $f'(x) - \dfrac{1}{4} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4e^x-(1+e^x)^2}{4(1+e^x)^2} = \dfrac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2} \geqslant 0$.

Donc, pour tout réel x, $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

c) Ainsi toutes les tangentes de la courbe C ont un coefficient directeur inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

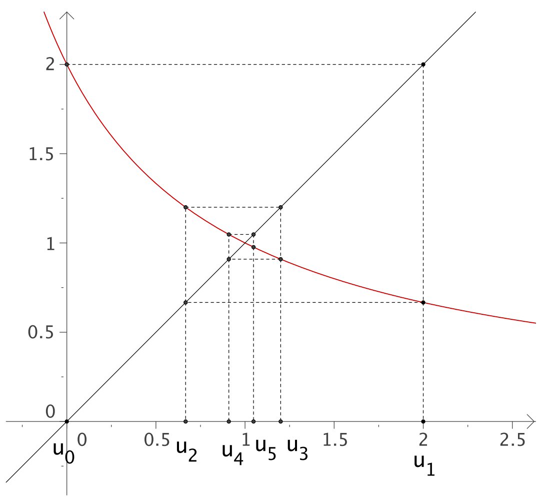
EXERCICE 2:

1. Les trois premiers termes de la suite (u_n) : $u_1 = \dfrac{2}{1+0} = 2$;

$u_2 = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$.

a) La représentation graphique des six premiers termes de la suite :



b) Conjectures sur la suite (u_n) : elle n'est pas monotone, elle est bornée par 0 et 2, et elle converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.

3. a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$:

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: supposons que pour un entier k , $0 \leqslant u_k \leqslant 2$; montrons que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$:

$0 \leqslant u_k \leqslant 2$, entraîne $1 \leqslant 1 + u_k \leqslant 3$, entraîne $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{1+u_k} u_k \leqslant 1$, entraîne $\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{1+u_k} u_k \leqslant 2$,

donc $0 \leqslant \frac{2}{1+u_k} u_k \leqslant 2$, soit $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Les variations de la suite (u_n) : $u_0 < u_1$, $u_2 < u_1$, $u_2 < u_3$, donc la suite n'est pas monotone.

c) La suite (u_n) converge si la conjecture de la question 2. b) est vraie. Sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$, soit $\frac{2}{1+x} = x$, soit $2 = (1 + x)x$ équivaut à $x^2 + x - 2 = 0$. Le discriminant $\Delta = 1 - 4(-2) = 9 > 0$, il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$. La limite de la suite doit être comprise entre 0 et 2, donc la limite est 1.

4. a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\frac{2+2(1+u_n)}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{1-u_n}{2(2+u_n)} = \frac{-1}{2} v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{-1}{2}$.

b) Donc $v_n = \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ et la limite de (v_n) est $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car la raison est strictement comprise entre 0 et 1.

c) On détermine u_n en fonction de n : de $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$, on tire $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$, puis $u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$, puis

$u_n = \frac{-2v_n-1}{v_n-1} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n-1}{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n-1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.