EXERCICE 1 **(8 points)**

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par:

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$; $v_0 = 7$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 , v_2 .
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante. On pourra utiliser le signe de (w_n).
b) Étudier les variations de la suite (v_n) .
c) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3\,u_n + 4\,v_n$.
a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
b) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

EXERCICE 2 **(6 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
3. a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où $g(x) = (x-1)e^x + 1$.
b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
d) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 **(6 points)**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$.
On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, et z_2 l'autre.
2. Donner les formes exponentielles des solutions z_1 et z_2.
3. Montrer que $(z_1)^6$ est un nombre réel strictement négatif.
4. Déterminer un entier n tel que $(z_2)^n$ est un nombre réel strictement positif.
5. Déterminer la solution réelle de l'équation : $z^3 = 8$.
6. Résoudre alors dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^3 = 8$.
On note z_3 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_4 l'autre.
7. Montrer que $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3 - z_4} = -i$.