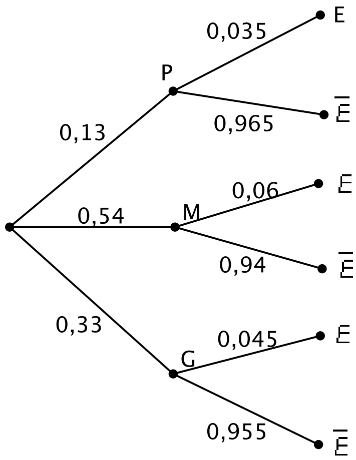
CORRIGE DEVOIR SURVEILLE N° 4 TERMINALE S 4

EXERCICE 1 : La proportion d'huîtres de chaque catégorie est: pour les petites 13 % ; pour les moyennes 54 % ; pour les grandes 33 %.

Catégorie	P	M	G
Probabilité d'erreur	0,035	0,06	0,045

a) L'arbre des probabilités :



b) On utilise la formule des probabilités totales : $p(E) = p(E\cap P) + p(E\cap M) + p(E\cap G) =$
$p(P)p_P(E) + p(M)p_M(E) + p(G)p_G(E) =$
$0{,}13\times 0{,}035 + 0{,}54\times 0{,}06 + 0{,}33\times 0{,}045 = 0{,}0518$.

c) La probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée est définie par $p_E(M) = \dfrac{p(E\cap M)}{p(E)} = \dfrac{0{,}54\times 0{,}06}{0{,}0518} = 0{,}625$.

EXERCICE 2 : 1. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée et somme de fonctions qui le sont, et $f'(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \dfrac{e^x+1-(e^x+x)}{e^x+x} = \dfrac{1-x}{e^x+x}$
qui est du signe de $1 - x$ car le dénominateur est strictement positif sur $[0; +\infty[$. Donc la fonction f est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

2. Pour tout réel x de $[0; +\infty[$, $f(x) = \ln(e^x + x) - x = \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \ln\left(\dfrac{e^x+x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{e^x}\right) = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On a $f(0) = \ln(1 + 0) - 0 = 0$.

2. La courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. La fonction f admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $f(1) = \ln(e + 1) - 1$. La fonction f est continue et croissante de $[0; 1]$ dans $[0; \ln(e + 1) - 1]$ et décroissante de $[1; +\infty[$ dans $[\ln(e + 1) - 1; 0[$.
Ainsi si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution;
si $m = 0$, l'équation $f(x) = m$ a une solution unique qui est 0;
si $0 < m < \ln(e + 1) - 1$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions, l'une dans $[0; 1]$ et l'autre dans $[1; +\infty[$;
si $m = \ln(e + 1) - 1$, l'équation $f(x) = m$ a une solution unique qui est 1;
si $m > \ln(e + 1) - 1$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solutions.

EXERCICE 3 : 1. Étude de la parité de la fonction f : L'intervalle $]-1; 1[$ est centrée en 0.
Pour tout x de $]-1; 1[$, $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$, car pour tout réel a et $b > 0$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = -\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.
Donc la fonction f est impaire. On en déduit que la courbe C admet l'origine O comme centre de symétrie.

2. Pour tout x de $]-1; 1[$, $f(x) = \ln(1 - x) - \ln(1 + x)$. La fonction f est dérivable sur $]-1; 1[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont, et $f'(x) = \dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-2}{1-x^2}$ qui est du signe de -2 car le dénominateur est strictement positif sur $]-1; 1[$, soit $f'(x) < 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-1; 1[$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x<1}} \dfrac{1-x}{1+x} = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x<1}} f(x) = -\infty$. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{1-x}{1+x} = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to-1} 1-x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} 1+x = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$. On pouvait aussi utiliser la parité de la fonction f.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, par $u_n = f(\frac{1}{n})$.

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = f(\frac{1}{n}) = \ln\left(\frac{1+1/n}{1-1/n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)/n}{(n-1)/n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln(n-1) - \ln(n+1)$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 < \frac{1}{n} < 1$, et la fonction f est décroissante sur $[0; 1[$. Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < 1$, donc $f(\frac{1}{n+1}) > f(\frac{1}{n})$, donc $u_{n+1} > u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(\frac{1}{x}) = f(0) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

5. On considère la fonction F définie sur $]-1; 1[$ par $F(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(x+1)$.

a) Pour montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f, on dérive F qui est dérivable comme somme et composée de fonctions qui le sont. $F'(x) = \ln(1-x) + (x-1)(\frac{-1}{1-x}) - [\ln(x+1) + (x+1)(\frac{1}{1+x})] =$
$\ln(1-x) + 1 - \ln(x+1) - 1 = \ln(1-x) - \ln(x+1) = f(x)$, donc F est bien une primitive de f.

b) $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx = F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{4}) = (\frac{3}{4} - 1)\ln(1-\frac{3}{4}) - (\frac{3}{4} + 1)\ln(\frac{3}{4} + 1) - [(\frac{1}{4} - 1)\ln(1-\frac{1}{4}) - (\frac{1}{4} + 1)\ln(\frac{1}{4} + 1)]$

$= (-\frac{1}{4})\ln(\frac{1}{4}) - (\frac{7}{4})\ln(\frac{7}{4}) + \frac{3}{4})\ln(\frac{3}{4}) + (\frac{5}{4})\ln(\frac{5}{4})$.

c) $I = (-\frac{1}{4})\ln(\frac{1}{4}) - (\frac{7}{4})\ln(\frac{7}{4}) + \frac{3}{4}\ln(\frac{3}{4}) + (\frac{5}{4})\ln(\frac{5}{4}) = \frac{1}{4}[\ln(4) - 7\ln(\frac{7}{4}) + 3\ln(\frac{3}{4}) + 5\ln(\frac{5}{4})] =$
$\frac{1}{4}[\ln 4 - 7\ln 7 + 7\ln 4 + 3\ln 3 - 3\ln 4 + 5\ln 5 - 5\ln 4] = \frac{1}{4}[-7\ln 7 + 3\ln 3 + 5\ln 5] = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3^3 \times 5^5}{7^7}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{84375}{823543}\right)$.