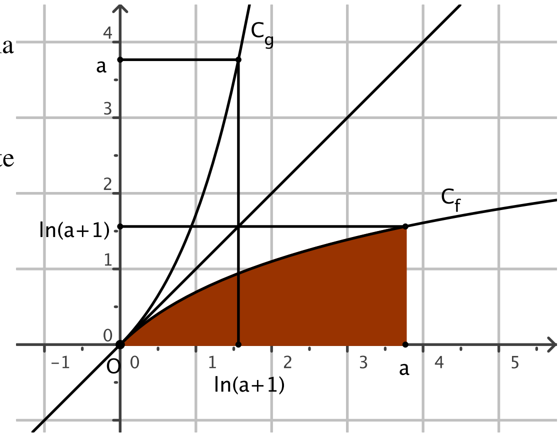
EXERCICE 1 : 1. Les fonctions f et g sont dérivables sur [0; +∞ [comme composée (pour f) et somme (pour g) de fonctions qui le sont. L'équation de la tangente à C_f en O est donnée par : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$. De même, l'équation de la tangente à C_g en O est donnée par : $y = g'(0)(x-0) + g(0) = x$. Donc les courbes C_f et C_g ont une tangente commune au point O(0; 0) d'équation $y = x$. La position de C_f par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $h(x) = f(x) - x = \ln(x+1) - x$. Pour étudier le signe de cette fonction, on cherche ses variations: cette fonction est dérivable sur [0; +∞ [comme somme de fonctions qui le sont; $h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$ qui est négatif sur [0; +∞ [, donc h est strictement décroissante sur [0; +∞ [. De plus, $h(0) = 0$, donc $h(x) \leqslant 0$ et $\ln(x+1) \leqslant x$.
Ainsi C_f est au-dessous de la tangente. On peut aussi montrer que C_g est au-dessus de la tangente.



2. Soit M(x; $f(x)$) un point de C_f. Son symétrique M' par rapport à la droite d'équation $y = x$ a pour coordonnées M'($f(x)$; x).
Or $g(f(x)) = g(\ln(x+1)) = e^{\ln(x+1)} - 1 = x + 1 - 1 = x$. Donc M' est sur la courbe C_g. Ainsi, C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. a) Puisque C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, l'axe des abscisses et la courbe C_f est égale à l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équation $y = 0$ et $y = a$, l'axe des ordonnées et la courbe C_g. Cette aire est la différence entre l'aire du rectangle délimitée par les axes de coordonnées et les droites d'équation $x = \ln(a+1)$, et $y = a$, et l'aire délimitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln(a+1)$, l'axe des abscisses et la courbe C_g. Donc $I(a) = a\ln(a+1) - \displaystyle\int_0^{\ln(a+1)} g(x)\,dx$.

b) Ainsi $I(a) = a\ln(a+1) - \displaystyle\int_0^{\ln(a+1)} g(x)\,dx = a\ln(a+1) - \left[e^x - x\right]_0^{\ln(a+1)} = a\ln(a+1) - \left(e^{\ln(a+1)} - \ln(a+1) - 1\right) =$
$a\ln(a+1) - (a+1) + \ln(a+1) + 1 = (a+1)\ln(a+1) - a$.

c) En effectuant une intégration par parties: On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x+1)$; d'où $u(x) = x + 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

D'où $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^a - \int_0^a \frac{x+1}{x+1}\,dx = (a+1)\ln(a+1) - 0 - \int_0^a 1\,dx =$
$(a+1)\ln(a+1) - \left[x\right]_0^a = (a+1)\ln(a+1) - a$.

EXERCICE 2 : On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = (x-1)e^x$.
1. On a $u'(x) = (ax + a + b)e^x$, d'où $u'(x) - 2u(x) = (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = (-ax + a - b)e^x = (x-1)e^x$. Par identification des polynômes, on obtient $-a = 1$ et $a - b = -1$. On trouve $a = -1$ et $b = 0$. Et $u(x) = -xe^x$.

2. v est solution de l'équation différentielle (E) équivaut à $v'(x) - 2v(x) = (x-1)e^x$ équivaut à $v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x)$ équivaut à $v'(x) - u'(x) = 2u(x) + 2v(x)$ équivaut à $(v(x) - u(x))' = 2(u(x) + v(x))$ équivaut à $u - v$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = ke^{2x}$. Les solutions de (E) sont les fonctions v telles que $v(x) - u(x) = ke^{2x}$ donc $v(x) = ke^{2x} + u(x) = ke^{2x} - xe^x$.
4. La solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ permet de déterminer la constante k: $f(0) = ke^{2\times 0} - 0e^0 = k = 1$.
La solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ est donc $f(x) = e^{2x} - xe^x$.
5. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} xe^x\,dx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \int_0^{\ln 3} xe^x\,dx = 4 - \int_0^{\ln 3} xe^x\,dx$.
On effectue une intégration par parties : $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$; d'où $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.

D'où $\int_0^{\ln 3} xe^x\,dx = \left[x\,e^x\right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} e^x\,dx = 3\ln3 - 0 - \left[e^x\right]_0^{\ln 3} = 3\ln3 - (3-1) = 3\ln3 - 2$.

Ainsi, $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = 4 - (3\ln3 - 2) = 6 - 3\ln3$.

EXERCICE 3 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}, \vec{v}$) (unité graphique: 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives: $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.
1. Placer les points sur un dessin (voir ci-dessous).
2. On a $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \dfrac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})} = \dfrac{9+6i\sqrt{3}-3}{9+3} = \dfrac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On cherche la forme exponentielle de ce nombre complexe: $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$.

Soit $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \theta$; alors $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. Ainsi $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. On sait que $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = \dfrac{CB}{CA} = 1$ donc CB = CA. Et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{3}$, donc le triangle ABC a deux côtés de même longueur et un angle de 60°, donc ABC est équilatéral.

4. On remarque sur le dessin que O semble être le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Or $OA = |z_A| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$, $OB = |z_B| = |-1 - i\sqrt{3}| = 2$, et OC = 2. Donc O est le centre du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC et son rayon est égal à 2.

5. a) On pose $z = x + iy$. Alors $4(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 4x + |z|^2 = 4x + x^2 + y^2 = (x+2)^2 - 4 + y^2 = 0$, soit $(x+2)^2 + y^2 = 4$, qui est l'équation du cercle de centre Ω d'affixe -2 et de rayon 2.
b) Construction de Γ_2 (voir ci-dessous).
c) Pour montrer que A et B appartiennent à Γ_2, on montre que $\Omega A = \Omega B = 2$.
Or $\Omega A = |-1 + i\sqrt{3} + 2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $\Omega B = |-1 - i\sqrt{3} + 2| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$. Donc A et B appartiennent à Γ_2.

6. a) $|z - 2| = |z + 1 + i\sqrt{3}|$ est équivalent à $|z - 2| = |z - (-1 - i\sqrt{3})|$ est équivalent à MC = MB, donc l'ensemble Γ_3 est la médiatrice du segment [BC] .
b) Comme le triangle ABC est équilatéral, le point A est équidistant de B et de C, donc appartient à cet ensemble Γ_3 .